

# Balogh's lemma

大田春外 (静岡大学・教育)

2013/1/24

Balogh [1] における small Dowker space の最も難しい部分は、構成された空間が可算パラコンパクトでないことを示すところである。それは、2つの elementary submodels を使って証明される [1, Lemma 1.2] に集約される。その後、Rudin は Lemma 1.2 の elementary submodel を使わない、そして (私にとっては) むしろ簡明な証明を与えた。本稿の目的は、後者の証明を紹介することである。その存在を教えてくださいました家本宣幸氏に感謝したい。

## 1. $\Delta$ -system lemma.

両者の証明の基本的なアイデアの1つは、 $\Delta$ -system lemma の次の証明にある (と思う) ので、本節で復習しておこう。

**補題 1** ( $\Delta$ -system lemma). 任意の非可算集合  $\Lambda$  に対し、有限集合からなる任意の族  $\mathcal{G} = \{g(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  は非可算  $\Delta$ -system を含む。

**証明**  $S = \bigcup\{g(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  とおく。任意の  $R \in [S]^{<\omega}$  に対して、次の3条件 (i), (ii), (iii) を満たす集合  $D = D(R) \subseteq \Lambda$  を1つ選んで固定する。

- (i)  $(\forall \lambda \in D)(R \subseteq g(\lambda))$ ,
- (ii)  $(\forall \lambda, \mu \in D)(\lambda \neq \mu \rightarrow g(\lambda) \cap g(\mu) = R)$ ,
- (iii)  $D$  は上の性質 (i), (ii) に関して極大である。

**注意 1.** ここで、 $D(R) = \emptyset$  であるかも知れない。また、 $R$  に対して、もし  $R \subseteq g(\lambda)$  である  $\lambda \in \Lambda$  が存在したならば、集合  $D = \{\lambda\}$  は (i) と (ii) を満たす。したがって、Zorn's lemma より、 $\lambda$  を要素として含む  $D(R)$  が存在する。

各  $i \in \omega$  に対して、 $A_i \subseteq S$  と  $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} A_0 &= \emptyset, \\ &\dots \\ \mathcal{D}_i &= \{D(R) : R \in [A_i]^{<\omega}\}, \\ A_{i+1} &= \bigcup\{g(\lambda) : \lambda \in \bigcup \mathcal{D}_i\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

**注意 2.** 上の定義において、 $[A_0]^{<\omega} = \{\emptyset\}$  だから、 $\mathcal{D}_0 = \{D(\emptyset)\}$ 。ここで、 $\{g(\lambda) : \lambda \in D(\emptyset)\}$  は、 $\mathcal{G}$  の互いに交わらない要素からなる極大部分族の1つである。

このとき,

$$(\forall i \in \omega)(A_i \subseteq A_{i+1}) \quad (1.1)$$

が成立する.

なぜなら, 明らかに  $A_0 \subseteq A_1$ . また,  $i > 0$  に対して,  $x \in A_i$  をとると,  $x \in g(\lambda)$  を満たす  $\lambda \in D \in \mathcal{D}_{i-1}$  と  $D = D(R)$  を満たす  $R \in [A_{i-1}]^{<\omega}$  が存在する. このとき,  $R \subseteq g(\lambda) \subseteq A_i$  だから,  $R \in [A_i]^{<\omega}$ . したがって,  $D \in \mathcal{D}_i$  だから,  $x \in g(\lambda) \subseteq A_{i+1}$ . ゆえに,  $A_i \subseteq A_{i+1}$ .

次に,

$$A = \bigcup_{i \in \omega} A_i, \quad \mathcal{D} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{D}_i$$

とおく. このとき, 次が成立することを示す.

$$\bigcup \mathcal{D} = \Lambda. \quad (1.2)$$

もし  $\mu \in \Lambda \setminus \bigcup \mathcal{D}$  が存在したとする. このとき,  $R = g(\mu) \cap A$  とおくと, (1.1) より, ある  $i \in \omega$  に対して,  $R \subseteq A_i$  だから  $D(R) \in \mathcal{D}_i$ . このとき, 任意の  $\lambda \in D(R)$  に対して,

$$R \subseteq g(\mu) \cap g(\lambda) \subseteq g(\mu) \cap A_{i+1} \subseteq g(\mu) \cap A = R$$

だから,  $g(\mu) \cap g(\lambda) = R$ . すなわち,  $D(R) \cup \{\mu\}$  は (i) と (ii) を満たす. ところが,  $\mu \notin \bigcup \mathcal{D}$  だから  $\beta \notin D(R)$ . これは  $D(R)$  の極大性に矛盾する.

(1.2) より  $\bigcup \mathcal{D} = \bigcup_{i \in \omega} \bigcup \mathcal{D}_i$  は非可算集合だから,

$$\bigcup \mathcal{D}_i = \bigcup \{D(R) : R \in [A_i]^{<\omega}\}$$

が非可算集合になる最小の  $i \in \omega$  を選ぶことができる. もし  $i = 0$  ならば,  $\{g(\lambda) : \lambda \in D(\emptyset)\}$  が非可算  $\Delta$ -system である (上の注意 2 を見よ). また,  $i > 0$  ならば,  $A_i$  は高々可算だから, ある  $R \in [A_i]^{<\omega}$  に対して,  $D(R)$  は非可算でなければならない. このとき,  $\{g(\lambda) : \lambda \in D(R)\}$  が非可算  $\Delta$ -system である.  $\square$

## 2. Balogh's lemma.

**補題 2** (Balogh [1, Lemma 1.2]). Let  $\lambda = 2^{\mathfrak{c}}$ , and let  $\langle c_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$  be a one-to-one enumeration of  ${}^{\mathfrak{c}}2 = \{c : c \text{ is a function from } \mathfrak{c} \text{ to } 2\}$ . Then there is a sequence  $\langle d_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$  of functions  $d_\xi : \mathfrak{c} \rightarrow 2$  in such a way that for every  $g : \mathfrak{c} \rightarrow [\lambda]^{<\omega}$ ,  $f : \mathfrak{c} \rightarrow \omega$  and  $h : \mathfrak{c} \rightarrow [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ , there are  $\alpha < \beta$  in  $\mathfrak{c}$  such that  $f(\alpha) = f(\beta)$ ,  $\beta \notin h(\alpha)$  and for every  $\xi \in g(\alpha)$ ,  $c_\xi(\alpha) = d_\xi(\beta)$ .

一般に, 集合  $S$  のべき集合を  $\mathcal{P}(S)$  で表す. 上の補題 2 において,  ${}^c 2 = \mathcal{P}(c)$  と考えられる. 各  $\alpha < c$  に対して, 射影

$$e_\alpha : \mathcal{P}(c) \rightarrow 2; A \mapsto \begin{cases} 1 & (\alpha \in A) \\ 0 & (\alpha \notin A) \end{cases}$$

を定義すると, 補題 2 は次のように表現される (これはイメージしやすい!).

**補題 3 (Rudin).** 各  $\beta < c$  に対して, 次を満たす写像  $d_\beta : \mathcal{P}(c) \rightarrow 2$  が定義できる. 任意の写像  $f : c \rightarrow \omega, g : c \rightarrow [\mathcal{P}(c)]^{<\omega}, h : c \rightarrow [c]^{<\omega}$  に対して, 次の 3 条件 (1)–(3) を満たす  $\alpha < \beta < c$  が存在する.

- (1)  $f(\alpha) = f(\beta)$ ,
- (2)  $e_\alpha \upharpoonright g(\alpha) = d_\beta \upharpoonright g(\alpha)$ ,
- (3)  $\beta \notin h(\alpha)$ .

**注意 3.** 補題 3 は補題 2 を導く. 補題 3 の写像  $d_\beta$  ( $\beta < c$ ) が定義できたとき, 各  $\xi < \lambda$  と  $\alpha < c$  に対して  $d'_\xi(\alpha) = d_\alpha(c_\xi^{-1}(\{1\}))$  と定めると,  $\langle d'_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$  は補題 2 の求めるものである.

**補題 3 の証明** 集合  $C \in [c]^{<\omega}$  と写像  $u : \text{dom}(u) \rightarrow [\mathcal{P}(C)]^{<\omega}$  が 2 条件

- (a)  $\text{dom}(u) \subseteq C$ ,
- (b)  $(\forall \alpha, \beta \in \text{dom}(u))(\alpha \neq \beta \rightarrow u(\alpha) \cap u(\beta) = \emptyset)$

を満たすとき, それらの組  $(C, u)$  を control pair とよぶ. 最初に, control pairs 全体の集合の濃度は  $c$  であることに注意しよう (これが鍵!). そこで, control pairs 全体を, 各 control pair が  $c$  回ずつ重複して現れるように並べた列を  $\{(C_\beta, u_\beta) : \beta < c\}$  とする. このとき, 各  $\beta < c$  に対して,

$$d_\beta : \mathcal{P}(c) \rightarrow 2; A \mapsto \begin{cases} e_\alpha(A) & (\exists \alpha \in \text{dom}(u_\beta))(A \cap C_\beta \in u_\beta(\alpha)), \\ e_\beta(A) & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると,  $d_\beta$  が求める写像である.

それを示すために, 任意の写像  $f : c \rightarrow \omega, g : c \rightarrow [\mathcal{P}(c)]^{<\omega}, h : c \rightarrow [c]^{<\omega}$  をとる. 補題 3 の条件 (1) と (3) を満たすように  $\alpha < \beta < c$  を選ぶことは易しい. 問題は条件 (2) である. 具体的なイメージをつかむために, 寄り道をして, 写像  $g$  の特別な場合を考えてみよう.

**例 1.**  $\bigcup_{\alpha < c} g(\alpha)$  が高々可算のとき:  $C = \emptyset, u = \emptyset$  とおくことによつて, control pair  $(C, u)$  を定義する. このとき, 集合

$$B = \{\beta < c : (C_\beta, u_\beta) = (C, u)\}$$

の濃度は  $\mathfrak{c}$  である. いま  $|\bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} g(\alpha)| \leq \omega$  だから, ある  $n \in \omega$ ,  $\mathcal{R} \in [\mathcal{P}(\mathfrak{c})]^{<\omega}$  と  $\rho: \mathcal{R} \rightarrow 2$  が存在して, 集合

$$B' = \{\beta \in B : f(\beta) = n, g(\beta) = \mathcal{R}, e_\beta \upharpoonright \mathcal{R} = \rho\}$$

の濃度は  $\mathfrak{c}$  になる. そこで,  $\alpha < \beta$  かつ  $\beta \notin h(\alpha)$  を満たす  $\alpha, \beta \in B'$  をとると, 条件 (1) と (3) は満たされる. さらに,  $\text{dom}(u_\beta) = \text{dom}(u) = \emptyset$  だから, 写像  $d_\beta$  の定義の最初の場合は起こらない. したがって,  $d_\beta = e_\beta$  だから,

$$e_\alpha \upharpoonright g(\alpha) = e_\alpha \upharpoonright \mathcal{R} = \rho = e_\beta \upharpoonright \mathcal{R} = d_\beta \upharpoonright g(\alpha).$$

ゆえに, 条件 (2) も満たされる.

**例 2.**  $\{g(\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$  が proper  $\Delta$ -system のとき, すなわち, ある  $\mathcal{R} \in [\mathcal{P}(\mathfrak{c})]^{<\omega}$  が存在して,

$$\begin{aligned} &(\forall \alpha < \mathfrak{c})(g(\alpha) \neq \mathcal{R}) \quad \text{かつ} \\ &(\forall \alpha, \beta < \mathfrak{c})(\alpha \neq \beta \rightarrow g(\alpha) \cap g(\beta) = \mathcal{R}) \end{aligned}$$

が成り立つとき: このとき, 集合

$$\Sigma = \{(f(\alpha), e_\alpha \upharpoonright \mathcal{R}) : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega \times {}^{\mathcal{R}}2$$

は高々可算だから, 高々可算な添え字の集合  $I$  を使って,  $\Sigma = \{(n_i, \rho_i) : i \in I\}$  と表すことができる. 各  $i \in I$  に対して,

$$f(\alpha_i) = n_i \quad \text{and} \quad e_{\alpha_i} \upharpoonright \mathcal{R} = \rho_i \quad (2.1)$$

を満たす  $\alpha_i < \mathfrak{c}$  を選ぶと,

$$(\forall i, j \in I)(i \neq j \rightarrow (g(\alpha_i) \setminus \mathcal{R}) \cap (g(\alpha_j) \setminus \mathcal{R}) = \emptyset). \quad (2.2)$$

さらに, 高々可算集合  $C \subseteq \mathfrak{c}$  で,  $\{\alpha_i : i \in I\} \subseteq C$  かつ

$$(\forall A, A' \in \bigcup_{i \in I} g(\alpha_i))(A \neq A' \rightarrow A \cap C \neq A' \cap C) \quad (2.3)$$

を満たすものをとることができる. このとき, 写像  $u$  を

$$u : \{\alpha_i : i \in I\} \rightarrow [\mathcal{P}(C)]^{<\omega}; \alpha_i \mapsto \{A \cap C : A \in g(\alpha_i) \setminus \mathcal{R}\}$$

と定めると, (2.2), (2.3) より  $(C, u)$  は control pair である. また, (2.3) より,

$$(\forall A \in \mathcal{R})(\forall i \in I)(A \cap C \notin u(\alpha_i)) \quad (2.4)$$

が成立する. いま, 集合

$$B = \left\{ \beta < \mathfrak{c} : (C_\beta, u_\beta) = (C, u), \beta > \sup(C \cup \bigcup_{\alpha \in C} h(\alpha)) \right\}$$

は空でない. 任意の  $\beta \in B$  をとると, ある  $i \in I$  に対して,

$$(f(\beta), e_\beta \upharpoonright \mathcal{R}) = (n_i, \rho_i).$$

このとき,  $\alpha_i$  と  $\beta$  が求めるものである. 実際,  $\alpha_i \in C$  だから, 集合  $B$  の定義より,  $\alpha_i < \beta$  かつ  $\beta \notin h(\alpha_i)$ . さらに, (2.1) より  $f(\alpha_i) = n_i = f(\beta)$ . ゆえに, 条件 (1) と (3) は満たされる. 次に,  $d_\beta \upharpoonright g(\alpha_i) = e_{\alpha_i} \upharpoonright g(\alpha_i)$  が成り立つことを示すために, 任意の  $A \in g(\alpha_i)$  をとる. もし  $A \in g(\alpha_i) \setminus \mathcal{R}$  ならば,  $A \cap C \in u(\alpha_i) = u_\beta(\alpha_i)$  だから,  $d_\beta$  の定義より,

$$d_\beta(A) = e_{\alpha_i}(A).$$

もし  $A \in \mathcal{R}$  ならば, (2.4) より  $A \cap C \notin u(\alpha_i) = u_\beta(\alpha_i)$  だから,  $d_\beta$  の定義と (2.1) より,

$$d_\beta(A) = e_\beta(A) = \rho_i(A) = e_{\alpha_i}(A).$$

ゆえに, 条件 (2) も満たされる.

一般の場合の証明は, 補題 1 の証明と同様に進めることができる. そのために, 任意の  $n \in \omega$ ,  $\mathcal{R} \in [\mathcal{P}(\mathfrak{c})]^{<\omega}$  と  $\rho : \mathcal{R} \rightarrow 2$  に対して, 次の 3 条件 (i), (ii), (iii) を満たす集合  $D = D(n, \mathcal{R}, \rho) \subseteq \mathfrak{c}$  を 1 つ選んで固定する.

- (i)  $(\forall \alpha \in D)(f(\alpha) = n, \mathcal{R} \subseteq g(\alpha), \rho = e_\alpha \upharpoonright \mathcal{R})$ ,
- (ii)  $(\forall \alpha, \beta \in D)(\alpha \neq \beta \rightarrow g(\alpha) \cap g(\beta) = \mathcal{R})$ ,
- (iii)  $D$  は上の性質 (i), (ii) に関して極大である.

各  $i \in \omega$  に対して,  $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{c})$  と  $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{c})$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \emptyset, \\ &\dots \\ \mathcal{D}_i &= \{D(n, \mathcal{R}, \rho) : n \in \omega, \mathcal{R} \in [\mathcal{A}_i]^{<\omega}, \rho : \mathcal{R} \rightarrow 2\}, \\ \mathcal{A}_{i+1} &= \bigcup \{g(\alpha) : \alpha \in D \in \mathcal{D}_i \text{ and } |D| \leq \omega\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

このとき,

$$(\forall i \in \omega)(\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_{i+1}). \quad (2.5)$$

次が成立する.

なぜなら, 明らかに  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ . また,  $i > 0$  に対して,  $A \in \mathcal{A}_i$  をとると,  $A \in g(\alpha)$  を満たす  $\alpha \in D \in \mathcal{D}_{i-1}$  と  $D = D(n, \mathcal{R}, \rho)$  を満たす  $n \in \omega$ ,  $\mathcal{R} \in [\mathcal{A}_{i-1}]^{<\omega}$  と  $\rho: \mathcal{R} \rightarrow 2$  が存在する. このとき,  $\mathcal{R} \subseteq g(\alpha) \subseteq \mathcal{A}_i$  だから,  $\mathcal{R} \in [\mathcal{A}_i]^{<\omega}$ . したがって,  $D \in \mathcal{D}_i$  だから,  $A \in g(\alpha) \subseteq \mathcal{A}_{i+1}$ . ゆえに,  $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}_{i+1}$ .

次に,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{D} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{D}_i$$

とおくと, 定義より,  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{D}$  は共に高々可算集合である. 以下, 2つの場合に分けて考える.

Case 1. 任意の  $D \in \mathcal{D}$  が高々可算のとき: この場合, 上の  $\mathcal{A}_i$  の定義において, 条件 “and  $|D| \leq \omega$ ” はなくても同じ集合が定義される. したがって, 補題 1 の証明と同様にして,  $\bigcup \mathcal{D} = \mathfrak{c}$  が成り立ち,

$$\bigcup_{\beta < \mathfrak{c}} g(\beta) \subseteq \mathcal{A} \quad (2.6)$$

が成立する. 結果として,  $\bigcup_{\beta < \mathfrak{c}} g(\beta)$  は高々可算だから, 例 1 と同様にして, 求める  $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$  を選ぶことができる.

注意 5. 等式  $\bigcup \mathcal{D} = \mathfrak{c}$  を確かめておこう. もし  $\beta < \mathfrak{c} \setminus \bigcup \mathcal{D}$  が存在したとする. このとき,  $f(\beta) = n$ ,  $g(\beta) \cap \mathcal{A} = \mathcal{R}$ ,  $e_\beta \upharpoonright \mathcal{R} = \rho$  とおく. (2.1) より, ある  $i \in \omega$  に対して  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_i$  だから,  $D = D(n, \mathcal{R}, \rho) \in \mathcal{D}_i$ . いま  $|D| \leq \omega$  だから,

$$\bigcup_{\alpha \in D} g(\alpha) \subseteq \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}.$$

さらに, 任意の  $\alpha \in D$  に対して,

$$\mathcal{R} \subseteq g(\beta) \cap g(\alpha) \subseteq g(\beta) \cap \mathcal{A}_{i+1} \subseteq g(\beta) \cap \mathcal{A} = \mathcal{R}$$

だから,  $g(\beta) \cap g(\alpha) = \mathcal{R}$ . すなわち,  $D \cup \{\beta\}$  は (i) と (ii) を満たす. ところが,  $\beta \notin \bigcup \mathcal{D}$  だから  $\beta \notin D$ . これは  $D(n, \mathcal{R}, \rho)$  の極大性に矛盾する. ゆえに,  $\bigcup \mathcal{D} = \mathfrak{c}$ .

Case 2. 非可算集合  $D \in \mathcal{D}$  が存在するとき:  $\mathcal{D}$  は高々可算だから,  $\mathcal{D}$  に属する非可算集合全体の集合を,  $\{D_j = D(n_j, \mathcal{R}_j, \rho_j) : j \in I\}$  と表すことができる. ただし,  $I$  は  $\omega$  または  $\omega$  の切片である. 各  $j \in I$  に対して, 帰納的に

$$g(\alpha_j) \cap \left( \mathcal{A} \cup \bigcup_{i < j} g(\alpha_i) \right) = \mathcal{R}_j$$

を満たす  $\alpha_j \in D_j$  を選ぶと,

$$(\forall i, j \in I)(i \neq j \rightarrow (g(\alpha_i) \setminus \mathcal{A}) \cap (g(\alpha_j) \setminus \mathcal{A}) = \emptyset). \quad (2.7)$$

さらに, 可算集合  $C \subseteq \mathfrak{c}$  で,  $\{\alpha_j : j < \omega\} \subseteq C$  かつ

$$(\forall A, A' \in \mathcal{A} \cup \bigcup_{i \in I} g(\alpha_i))(A \neq A' \rightarrow A \cap C \neq A' \cap C). \quad (2.8)$$

を満たすものをとることができる. このとき, 写像  $u$  を

$$u : \{\alpha_j : j \in I\} \rightarrow [\mathcal{P}(C)]^{<\omega}; \alpha_j \mapsto \{A \cap C : A \in g(\alpha_j) \setminus \mathcal{A}\}$$

と定めると, (2.7), (2.8) より  $(C, u)$  は control pair である. (2.8) より,

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\forall j \in I)(A \cap C \notin u(\alpha_j)) \quad (2.9)$$

が成り立つ. いま, 集合

$$B = \left\{ \beta < \mathfrak{c} : (C_\beta, u_\beta) = (C, u), \beta > \sup(C \cup \bigcup_{\alpha \in C} h(\alpha)) \right\}$$

の濃度は  $\mathfrak{c}$  である. ここで, 2つの場合を考えよう.

Subcase 2a.  $(\forall \beta \in B)(g(\beta) \subseteq \mathcal{A})$  のとき:  $\mathcal{A}$  は高々可算だから, ある  $n \in \omega$ ,  $\mathcal{R} \in [\mathcal{P}(\mathfrak{c})]^{<\omega}$  と  $\rho : \mathcal{R} \rightarrow 2$  が存在して, 集合

$$B' = \{\beta \in B : f(\beta) = n, g(\beta) = \mathcal{R}, e_\beta \upharpoonright \mathcal{R} = \rho\}$$

の濃度は  $\mathfrak{c}$  になる. そこで,  $\alpha < \beta$  かつ  $\beta \notin h(\alpha)$  を満たす  $\alpha, \beta \in B'$  をとると, 条件 (1) と (3) は満たされる. 条件 (2) が満たされることを示すために, 任意の  $A \in g(\alpha)$  をとると, Subcase 2a の仮定より  $A \in \mathcal{A}$ . このとき, (2.9) と  $d_\beta$  の定義より  $d_\beta(A) = e_\beta(A)$ . ゆえに,

$$d_\beta \upharpoonright g(\alpha) = e_\beta \upharpoonright \mathcal{R} = \rho = e_\alpha \upharpoonright \mathcal{R} = e_\alpha \upharpoonright g(\alpha)$$

だから, (2) も満たされる.

Subcase 2b.  $(\exists \beta \in B)(g(\beta) \not\subseteq \mathcal{A})$  のとき:  $g(\beta) \not\subseteq \mathcal{A}$  である  $\beta \in B$  を一つ選んで,  $n = f(\beta)$ ,  $\mathcal{R} = g(\beta) \cap \mathcal{A}$ ,  $\rho = e_\beta \upharpoonright \mathcal{R}$  とおく. (2.5) より, ある  $i \in \omega$  に対して  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_i$  だから,  $D = D(n, \mathcal{R}, \rho) \in \mathcal{D}_i$ . このとき,  $D$  は非可算である.

なぜなら, もし  $D$  が可算集合ならば,

$$\bigcup_{\alpha \in D} g(\alpha) \subseteq \mathcal{A}_{i+1} \subseteq \mathcal{A}$$

だから,  $\beta \notin D$ . さらに, 任意の  $\alpha \in D$  に対して,

$$\mathcal{R} \subseteq g(\beta) \cap g(\alpha) \subseteq g(\beta) \cap \mathcal{A}_{i+1} \subseteq g(\beta) \cap \mathcal{A} = \mathcal{R}$$

だから,  $g(\beta) \cap g(\alpha) = \mathcal{R}$ . これは  $D = D(n, \mathcal{R}, \rho)$  の極大性に矛盾する.

したがって、ある  $j \in I$  に対して、

$$D = D(n, \mathcal{R}, \rho) = D(n_j, \mathcal{R}_j, \rho_j)$$

が成り立つ。このとき、 $\alpha_j$  と  $\beta$  が求めるものである。実際、 $\alpha_j \in C$  だから、集合  $B$  の定義より、 $\alpha_j < \beta$  かつ  $\beta \notin h(\alpha_j)$ 。さらに、 $f(\alpha_j) = n_j = n = f(\beta)$ 。ゆえに、条件 (1) と (3) は満たされる。

次に、 $d_\beta \upharpoonright g(\alpha_j) = e_{\alpha_j} \upharpoonright g(\alpha_j)$  が成り立つことを示すために、任意の  $A \in g(\alpha_j)$  をとる。もし  $A \in g(\alpha_j) \setminus \mathcal{R}_j$  ならば、 $A \cap C \in u(\alpha_j) = u_\beta(\alpha_j)$  だから、 $d_\beta$  の定義より、

$$d_\beta(A) = e_{\alpha_j}(A).$$

もし  $A \in g(\alpha_j) \cap \mathcal{R}_j$  ならば、 $A \in \mathcal{A}$  だから、(2.5) より  $A \cap C \notin u(\alpha_j) = u_\beta(\alpha_j)$ 。ゆえに、

$$d_\beta(A) = e_\beta(A) = \rho(A).$$

一方、 $\alpha_j \in D(n_j, \mathcal{R}_j, \rho_j)$  かつ  $A \in \mathcal{R}_j$  だから、

$$e_{\alpha_j}(A) = \rho_j(A) = \rho(A).$$

ゆえに、 $d_\beta(A) = e_{\alpha_j}(A)$ 。以上により、(2) も満たされる。  $\square$

### 3. Balogh's Dowker space.

Balogh [1] で構成された Dowker space の補題 3 に基づいた定義を述べておこう。補題 3 の前で定義した射影  $e_\alpha$  ( $\alpha < \mathfrak{c}$ ) と補題 3 で存在を示した写像  $d_\beta$  ( $\beta < \mathfrak{c}$ ) を用いる。

任意の  $\alpha < \mathfrak{c}$ ,  $s \in [P(\mathfrak{c})]^{<\omega}$ ,  $a \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$  に対して、

$$F(\alpha, s, a) = \{\beta \in \mathfrak{c} : d_\beta \upharpoonright s = e_\alpha \upharpoonright s\} \setminus a$$

とおき、各  $\alpha < \mathfrak{c}$  に対して、次のように定める。

$$\mathcal{F}_\alpha = \{F(\alpha, s, a) : s \in [P(\mathfrak{c})]^{<\omega}, a \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}\}$$

このとき、 $\mathcal{F}_\alpha$  は有限共通部分に関して閉じている。集合  $X = \mathfrak{c} \times \omega$  と点  $x = \langle \alpha, n \rangle \in X$  に対して、

$$\mathcal{V}(x) = \begin{cases} \{\{x\}\} & \text{if } n = 0 \\ \{\{x\} \cup (F \times \{n-1\}) : F \in \mathcal{F}_\alpha\} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

とおくと、

$$\tau = \{U \subseteq X : (\forall x \in U)(\exists V \in \mathcal{V}(x))(V \subseteq U)\}$$

は、 $X$  上の  $T_1$  位相である。位相空間  $(X, \tau)$  が求める Dowker 空間である。



## 参考文献

- [1] Z. T. Balogh, *A small Dowker space in ZFC*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2555–2560.
- [2] Z. T. Balogh, *A normal screenable nonparacompact space in ZFC*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 1835–1844.
- [3] Z. T. Balogh, *Nonshrinking open covers and K. Morita's third conjecture*, Topology Appl., **84** (1998), 185–198.
- [4] Z. T. Balogh, *Dowker spaces and paracompactness questions*, Topology Appl., **114** (2001), 49–60.
- [5] Z. T. Balogh, *Nonshrinking open covers and K. Morita's duality conjecture*, Topology Appl., **115** (2001), 333–341.
- [6] Z. T. Balogh, *A natural Dowker space*, Topology Proc., **27** (2003), 1–7.