はじめよう Balogh's Dowker Spaces

– Elementary Submodel 入門 –

大田春外

2009 年 10 月 27 日
修正：2010 年 11 月 24 日
再修正：2011 年 5 月 17 日

目次

本稿は，2008 年夏に行ったセミナー・ノートに Balogh's Dowker space の構成を加えたものである．この勉強を通して，静岡大学理学部の依岡輝幸氏には多くのことを教わった．初心者の質問にいつも真剣に答えてくれた依岡氏と，つたない発表を根気よく聴いてくれた同僚の山田耕三氏と友人達，および，その一人で本稿を精読して多くの誤りを指摘してくれた高崎経済大学の山崎薫里氏に感謝したい．なお，本セミナーは，平成 19–21 年度科学研究費補助金（基盤研究C）課題番号：19540122 による研究の一環として行われた．

1　クラス $\mathbf{V}$ と推移的な集合

以下，$\mathbf{V}=$ 集合全体のクラス，$\mathbf{ON}=$ 順序数全体のクラス，$\mathbf{CN}=$ 基数全体のクラスとする．$\mathbf{CN}\subseteq\mathbf{ON}\subseteq\mathbf{V}$ が成り立つ．我々は「位相空間の連結成分は閉集合である」というような命題を考える．この場合の「位相空間」は，特定の位相空間ではなく，すべての位相空間を対象としている．すなわち，我々は位相空間の全体のクラスでこの命題を考えている．後で説明するように，位相空間全体のクラスは $\mathbf{V}$ に含まれていて，$\mathbf{V}$ は我々が数学を考える宇宙のようなものだと考えられる．

定義 1.1. 帰納法によって，各 $\alpha\in\mathbf{ON}$ に対して，$R(\alpha)$ を次のように定義する．$R(0)=\emptyset$, $R(\alpha+1)=\mathcal{P}(R(\alpha))$, α が極限順序数のとき $R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}R(\beta)$. ただし，$\mathcal{P}(a)$ は集合 a のべき集合を表す．

以後，基礎の公理 (Axiom of Foundation) によって，次の等式が成立していると考える（[12, Ch.3, §4] 参照）．

$$\mathbf{V}=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}}R(\alpha). \tag{1.1}$$

各 $R(\alpha)$ は集合であるが $\mathbf{V}$ は集合でない．$\mathbf{V}$ において自然数（＝有限順序数）は次のように定義される．

$$\begin{aligned}0&=\emptyset,\\1&=\{\emptyset\},\\2&=\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\\3&=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\\&\cdots\cdots\\n+1&=n\cup\{n\},\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

例 1.2. 集合 $a,b\in\mathbf{V}$ の順序対は $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}\in\mathbf{V}$ として定義される．a,b の直積集合は $a\times b=\{\langle x,y\rangle : x\in a, y\in b\}\in\mathbf{V}$ である．写像 $f: a\to b$ は，$f=\{\langle x,f(x)\rangle : x\in a\}\in\mathbf{V}$ であると考える．簡単な具体例として，写像 $f:2\to 3; n\mapsto n+1$ は，直積集合 2×3 の部分集合

$$f=\{\langle\emptyset,\{\emptyset\}\rangle,\langle\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\rangle\}\in\mathbf{V}$$

である．また，任意の位相空間は集合と位相構造の順序対として $\mathbf{V}$ の元である．このように，$\mathbf{V}$ は数学的対象物をすべて含んでいると考えることができる．詳しくは，[12, Ch.1, 3] を参照．

注意 1.3. 等式 (1.1) より，$\mathbf{V}$ の元の元はまた $\mathbf{V}$ の元である．この事実は，任意の集合 x は $\mathbf{V}$ の元であると同時に $\mathbf{V}$ の部分集合でもあることを意味する．例えば，$a = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathbf{V}$ であるが，$\emptyset, \{\emptyset\} \in \mathbf{V}$ だから $a \subseteq \mathbf{V}$ でもある．基礎の公理から，$\mathbf{V}$ には "$x \in x$" をみたす集合 x は存在しないことにも注意しておこう（[12, Ch.3, §4] 参照）．

注意 1.4. 後節で定義する elementary submodel M は $\mathbf{V}$ の部分集合（すなわち，$M \subseteq \mathbf{V}$ かつ M は集合）である．一般に，集合 $A \subseteq \mathbf{V}$ を考える際には，次の 2 つの現象 (1), (2) が起こる可能性がある．

(1) $a \in A$ であっても $a \subseteq A$ であるとは限らない．

(2) $a \subseteq A$ であっても $a \in A$ であるとは限らない．

例えば，$a = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ として，$A = R(3) \setminus \{a\}$ とおくと，$a \subseteq A$ であるが $a \notin A$. 他方，$A = R(3) \setminus \{\emptyset\}$ とおくと，$a \in A$ であるが $a \not\subseteq A$.

定義 1.5. 集合 A が推移的（transitive）であるとは，A が条件

$$\forall x, y\, (y \in x \in A \to y \in A)$$

をみたすことをいう．言いかえれば，A の元がすべて A の部分集合である（すなわち，注意 1.4 (1) の現象が起こらない）ということである．

各 α に対し，集合 $R(\alpha)$ は transitive である．他方，注意 1.4 で観察したように，$R(3) \setminus \{\emptyset\}$ は transitive でない．順序数を，その元がすべて transitive であるような transitive 集合として定義することが出来る（[10, §1.2] 参照）．集合 A が transitive のとき，もし $x_{n-1} \in \cdots \in x_1 \in x_0 \in A$ ならば，すべての $i < n$ に対し $x_i \in A$ である．集合 A が与えられたとき，A に A の元の元，A の元の元の元，$\cdots$ を付け加えて，transitive 集合を作ることができる．厳密には，次のように定義する．

定義 1.6. 集合 A に対し，帰納的に $\bigcup^0 A = A$, $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$ と定めたとき，集合 $\mathrm{trcl}(A) = \bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$ を A の**推移的閉包** (transitive closure) とよぶ．

練習 1. $x = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ に対し，$\bigcup^n x$ $(n < \omega)$ と $\mathrm{trcl}(x)$ を求めよ．

練習 2. $x = \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$ に対し，$\bigcup^n x$ $(n < \omega)$ と $\mathrm{trcl}(x)$ を求めよ．

練習 3. 集合 a, b について，次の (1)–(4) を示せ．

(1) a が transitive であるためには，$a \subseteq \mathcal{P}(a)$ であることが必要十分．

(2) a のすべての元が transitive ならば，$\bigcup a$ は transitive.

(3) a のすべての元が transitive ならば，$\bigcap a$ は transitive.

(4) $a \neq \emptyset$ かつ a が transitive ならば，$\bigcap a = \emptyset$.

2 論理式と相対化

数学の命題 φ は論理式によって表現されるから，広義的には φ もまた論理式であると考えられる．後の議論では，そのとき φ の自由変数が何であるかを知ることが必要になる．

定義 **2.1.** 帰納法によって論理式 (formula) を次のように定義する．

(1) $v_0 \in v_1$ と $v_0 = v_1$ は論理式である．

(2) φ と ψ が論理式のとき，$\varphi \wedge \psi$ と $\neg\varphi$ と $\exists x\, \varphi(x)$ は論理式である．

論理式 $v_0 \in v_1$ と $v_0 = v_1$ は原子論理式 (atomic formula) とよばれる．以下の等式の左辺は右辺の省略形である．

$$\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \\
\forall x\, \varphi(x) &= \neg(\exists x\, (\neg\varphi(x))), \\
\varphi \rightarrow \psi &= (\neg\varphi) \vee \psi, \\
\varphi \leftrightarrow \psi &= ((\neg\varphi) \vee \psi) \wedge ((\neg\psi) \vee \varphi).
\end{aligned}$$

束縛記号 $\exists, \forall$ と共に使われる変数を束縛変数とよび，それ以外の変数を自由変数という（詳しくは [12, Ch.1, §2] 参照）．自由変数 $a_1, \cdots, a_n$ を持つ論理式 φ を $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ のように表す．

例 **2.2.** 論理式 $(v_0 \in v_1) \vee (v_0 = v_2)$ の自由変数は v_0, v_1, v_2 だから，

$$\varphi(v_0, v_1, v_2) = (v_0 \in v_1) \vee (v_0 = v_2)$$

と書く．次に論理式 $\exists v_0\, \varphi(v_0, v_1, v_2)$ を ψ とすると，ψ の自由変数は v_1, v_2 だから，次のように書かれる．

$$\begin{aligned}
\psi(v_1, v_2) &= \exists v_0\, \varphi(v_0, v_1, v_2) \\
&= \exists v_0\, ((v_0 \in v_1) \vee (v_0 = v_2)).
\end{aligned}$$

例 **2.3.** 論理式 $\exists x\, (\neg(x = a) \rightarrow \forall y\, (y \in b \rightarrow x \in y))$ において，すべての x と y は束縛変数，a と b は自由変数である．したがって，

$$\varphi(a, b) = \exists x\, (\neg(x = a) \rightarrow \forall y\, (y \in b \rightarrow x \in y)).$$

例 **2.4.** 集合 a, b に対し，“$a \subseteq b$” は論理式

$$\forall x\, (x \in a \rightarrow x \in b)$$

によって表現される．また，“$a = \bigcup b$” は論理式

$$\forall x\, (x \in a \leftrightarrow \exists y\, (y \in b \wedge x \in y))$$

によって表現される．どちらの論理式も自由変数は a, b である．

注意 2.5. 次の等式の右辺は左辺のように書いてもよい．

$$\exists x \in A\,(\varphi(x)) = \exists x\,(x \in A \wedge \varphi(x)),$$
$$\forall x \in A\,(\varphi(x)) = \forall x\,(x \in A \rightarrow \varphi(x)).$$

例 2.6. 集合 a, b に対し，“$f : a \to b$” は次のように表される．

$$(f \subseteq a \times b) \wedge (\forall x \in a\,((\exists y \in b\,(\langle x, y\rangle \in f)) \wedge (\forall y_1, y_2 \in b\,(((\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f) \rightarrow y_1 = y_2))))$$

ここで，“$f \subseteq a \times b$” や “$\langle x, y\rangle \in f$” などをさらに原子論理式に分解しても，$f, a, b$ 以外の自由変数が必要になることはない．同様に，“$f[a] = b$” であることも，自由変数 f, a, b を使って表される．

例 2.7. 位相空間 $X = (X, \tau)$ に対し，「$\mathcal{B}$ は X の基底である」は，

$$(\mathcal{B} \subseteq \tau) \wedge (\forall U \in \tau\, \forall x \in X\,(x \in U \rightarrow \exists B \in \mathcal{B}\,(x \in B \subseteq U))).$$

自由変数は $X, \tau, \mathcal{B}$ である．また,「X はコンパクトである」は

$$\forall \mathcal{U}((\mathcal{U} \subseteq \tau \wedge X = \bigcup \mathcal{U}) \rightarrow \exists \mathcal{V}(\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \wedge X = \bigcup \mathcal{V} \wedge |\mathcal{V}| < \omega)).$$

ここで，$|\mathcal{V}| < \omega$ は，次のように表される．

$$\exists n\,(\exists f\,((n \in \omega) \wedge (f : n \to \mathcal{V}) \wedge (f[n] = \mathcal{V}))).$$

全体として，X がコンパクトであることを表現するために必要な自由変数は X, τ, ω である．

種々の数式の論理式による表現例については，[10, Lemma 4.2.8] の証明および [12, Ch. IV, Theorems 3.9, 3.11] の証明を参照せよ．

定義 2.8. $A \subseteq \mathbf{V}$ とする．任意の論理式 φ に対し，その相対化 $A \vDash \varphi$（φ は A で真である）を，φ に関する帰納法によって，次のように定義する．

(1) $A \vDash$ “$v_0 = v_1$” $\Leftrightarrow v_0 = v_1$,
(2) $A \vDash$ “$v_0 \in v_1$” $\Leftrightarrow v_0 \in v_1$,
(3) $A \vDash$ “$\varphi \wedge \psi$” $\Leftrightarrow A \vDash \varphi \wedge A \vDash \psi$,
(4) $A \vDash$ “$\neg\varphi$” $\Leftrightarrow \neg(A \vDash \varphi)$,
(5) $A \vDash$ “$\exists x\, \varphi(x)$” $\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge A \vDash \varphi(x))$.

練習 4. 次の (1)–(4) が成立することを定義から導け．

(1) $A \vDash$ “$\varphi \vee \psi$” $\Leftrightarrow A \vDash \varphi \vee A \vDash \psi$,
(2) $A \vDash$ “$\forall x\, \varphi(x)$” $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow A \vDash \varphi(x))$,
(3) $A \vDash$ “$\varphi \rightarrow \psi$” $\Leftrightarrow A \vDash \varphi \rightarrow A \vDash \psi$,
(4) $A \vDash$ “$\varphi \leftrightarrow \psi$” $\Leftrightarrow A \vDash \varphi \leftrightarrow A \vDash \psi$.

注意 2.9. 次の等式の右辺は左辺のように書いてもよい．

$$\exists x \in A\,(A \vDash \varphi(x)) = \exists x\,(x \in A \wedge A \vDash \varphi(x)),$$
$$\forall x \in A\,(A \vDash \varphi(x)) = \forall x\,(x \in A \to A \vDash \varphi(x)).$$

通常の数学においてある命題 φ が証明されたとする．これは φ が（我々が数学を考えている宇宙）$\mathbf{V}$ で真ということだから，$\mathbf{V} \vDash \varphi$ と書くことができる．この書き方が定義 2.8 と矛盾しないことを，後の注意 2.12 で説明する．いくつかの例を与えよう．

例 2.10. 論理式 $\varphi(v_0, v_1) =$ “$v_0 \in v_1$” と $\mathbf{V}$ の 2 元 $a = \{\emptyset\}$, $b = \{\{\emptyset\}\}$ について考える．このとき，$\varphi(a, b) =$ “$a \in b$” である．

(1) 明らかに $a \in b$ であるが，これは（我々が数学を考えている宇宙）$\mathbf{V}$ で $a \in b$ が真ということだから，$\mathbf{V} \vDash \varphi(a, b)$ と書くことができる．

(2) 任意の $A \subseteq \mathbf{V}$ に対して，定義 2.8 の (2) より

$$A \vDash \varphi(v_0, v_1) \Leftrightarrow A \vDash \text{“}v_0 \in v_1\text{”} \Leftrightarrow v_0 \in v_1.$$

いま $a \in b$ は真だから，任意の $A \subseteq \mathbf{V}$ に対し，

$$A \vDash \varphi(a, b) \quad \text{（言いかえれば } A \vDash \text{“}a \in b\text{”）}$$

は真である．

> 註．特に $A = \emptyset$ や $A = \{\emptyset\}$ のときも $A \vDash \varphi(a, b)$ は真であるが，これらの場合 $a, b \notin A$ である．この現象について [12, Ch.4, §2] には，次のように述べられている．「$x_1, \ldots, x_n$ が $\mathbf{M}$ に属さないときには，$\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ $(= \mathbf{M} \vDash \phi(x_1, \ldots, x_n))$ の意味づけは明らかではありませんが，これはさほど問題にはなりません．」

(3) 最後に論理式 $\exists x\,\varphi(x, b) = \exists x\,(x \in b)$ を考えよう．いま $a \in b$ だから，$\exists x\,\varphi(x, b)$ は真である．この事実を $\mathbf{V} \vDash \exists x\,\varphi(x, b)$ と書くことができる．$A \subseteq \mathbf{V}$ に対しては，定義 2.8 の (5) と注意 2.9 と定義 2.8 の (2) より，

$$\begin{aligned}
A \vDash \exists x\,\varphi(x, b) &\Leftrightarrow A \vDash \text{“}\exists x\,(x \in b)\text{”} \\
&\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge A \vDash \text{“}x \in b\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(A \vDash \text{“}x \in b\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(x \in b).
\end{aligned}$$

例えば，$R(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ には b の元 a が存在するから，$R(2) \vDash \exists x\,\varphi(x, b)$．一方，$R(1) = \{\emptyset\}$ には b の元は存在しないから，$R(1) \nvDash \exists x\,\varphi(x, b)$．

例 2.11. 論理式 $\varphi(a,b) = \exists x\,(\neg(x=a) \to \forall y\,(y \in b \to x \in y))$ に対して，$A \vDash \varphi(a,b)$ を考えてみよう．注意 2.9 で述べた略記法を適宜用いる．

$$\begin{aligned}
A \vDash \varphi(a,b) &\Leftrightarrow A \vDash \text{“}\exists x\,(\neg(x=a) \to \forall y\,(y \in b \to x \in y))\text{”} \\
&\Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge A \vDash \text{“}\neg(x=a) \to \forall y\,(y \in b \to x \in y)\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(A \vDash \text{“}\neg(x=a) \to \forall y\,(y \in b \to x \in y)\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(A \vDash \text{“}\neg(x=a)\text{”} \to A \vDash \text{“}\forall y\,(y \in b \to x \in y)\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(\neg(A \vDash \text{“}x=a\text{”}) \to A \vDash \text{“}\forall y\,(y \in b \to x \in y)\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(\neg(x=a) \to A \vDash \text{“}\forall y\,(y \in b \to x \in y)\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(\neg(x=a) \to \forall y\,(y \in A \to A \vDash \text{“}y \in b \to x \in y\text{”})) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(\neg(x=a) \to \forall y \in A\,(A \vDash \text{“}y \in b \to x \in y\text{”})) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(\neg(x=a) \to \forall y \in A\,(A \vDash \text{“}y \in b\text{”} \to A \vDash \text{“}x \in y\text{”})) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A\,(\neg(x=a) \to \forall y \in A\,(y \in b \to x \in y)).
\end{aligned}$$

例 2.10, 2.11 から類推されるように，論理式 φ の相対化 $A \vDash \varphi$ は，φ の中の $\exists x$ を $\exists x \in A$ に置き換え，$\forall x$ を $\forall x \in A$ に置き換えて得られる論理式である．それは記号 $\vDash$ を含まない通常の論理式である．

注意 2.12. $\mathbf{V}$ は集合全体のクラスだから，$\exists x$ と $\exists x \in \mathbf{V}$ は同じ，$\forall x$ と $\forall x \in \mathbf{V}$ は同じである．したがって，上の事実より，φ と $\mathbf{V} \vDash \varphi$ は一致する．

例 2.13. 論理式 $u \subseteq v$ に対して，$A \vDash \text{“}u \subseteq v\text{”}$ を考えてみよう．

$$\begin{aligned}
A \vDash \text{“}u \subseteq v\text{”} &\Leftrightarrow A \vDash \text{“}\forall x\,(x \in u \to x \in v)\text{”} \\
&\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to A \vDash \text{“}x \in u \to x \in v\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in A\,(A \vDash \text{“}x \in u \to x \in v\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in A\,(A \vDash \text{“}x \in u\text{”} \to A \vDash \text{“}x \in v\text{”}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in A\,(x \in u \to x \in v) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in u \cap A\,(x \in v) \\
&\Leftrightarrow u \cap A \subseteq v.
\end{aligned}$$

例えば，$A = R(3) \setminus \{\emptyset\}$, $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $b = \{\{\emptyset\}\}$ とおくと，$a, b \in A$. 明らかに $a \not\subseteq b$ だから，$\mathbf{V} \nvDash \text{“}a \subseteq b\text{”}$. 他方，$a \cap A = b$ だから，$A \vDash \text{“}a \subseteq b\text{”}$.

> 註．最後の具体例では，さらに $b \cap A \subseteq a$ だから，$A \vDash \text{“}b \subseteq a\text{”}$. ゆえに，
>
> $$A \vDash \text{“}(a \subseteq b) \wedge (b \subseteq a)\text{”}.$$
>
> ところが，$a \neq b$ だから，$A \nvDash \text{“}a = b\text{”}$. これは，$A$ が外延性の公理 (簡単に言えば，要素が等しい集合は等しい) を満たさないことを示している．

練習 5. 論理式 $u \cap v \neq \emptyset$ について，$A \vDash$ "$u \cap v \neq \emptyset$" $\Leftrightarrow u \cap v \cap A \neq \emptyset$ であることを確かめよ．

3　$H(\theta)$ と反映定理

集合 $H(\theta) \subseteq \mathbf{V}$ の定義を与え，反映定理 (Reflection Theorem) について説明する．一般に，数学の定理 φ を証明するということは，$\mathbf{V} \vDash \varphi$ を証明することである．そのとき，反映定理から，十分大きな θ に対して $H(\theta) \vDash \varphi$ を証明すればよいことが分かる（この状況は，Tychonoff 空間 X に関する命題を考えるとき，十分大きな θ に対して，$X \subseteq \mathbb{R}^\theta$ であると仮定してよいことに似ている）．その上で，$H(\theta)$ の elementary submodel を利用するのが，後の応用での一般的な証明の手順である．

定義 3.1. 無限濃度 θ に対し，$H(\theta) = \{x \in \mathbf{V} : |\mathrm{trcl}(x)| < \theta\}$ とおく．$H(\theta)$ の元を遺伝的に濃度 θ 未満 (hereditarily of cardinality $< \theta$) の集合とよぶ．

集合 $H(\theta)$ については，[10, §4.1], [12, Ch. IV, §6] を参照．特に，$H(\theta)$ は ZFC から Power Set Axiom を除いた公理群 ZFC − P を満たしている．ここでは，後で必要となる事実だけを補題として述べる．

補題 3.2. 無限濃度 θ に対して，次が成立する．

(1) $H(\theta)$ は transitive,
(2) $H(\theta) \subseteq R(\theta)$,
(3) $H(\theta) \cap \mathbf{ON} = \theta$,
(4) $a, b \in H(\theta)$ かつ $f : a \to b$ ならば，$f \in H(\theta)$.

証明. (1) 一般に $y \in x \Rightarrow \mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ が成り立つことから導かれる．(2) は，[10, Lemmas 4.1.2] または [12, Ch. IV, Lemmas 6.2] を参照．(3) を示す．(3) の両辺の元は順序数だから transitive である．したがって，両辺どちらの元 α に対しても $\mathrm{trcl}(\alpha) = \alpha$ が成立する．いま，任意の $\alpha \in H(\theta) \cap \mathbf{ON}$ をとると，$\alpha \in H(\theta)$ だから，$|\alpha| = |\mathrm{trcl}(\alpha)| < \theta$. ゆえに $\alpha \in \theta$. 逆に，任意の $\alpha \in \theta$ をとると，$|\mathrm{trcl}(\alpha)| = |\alpha| \leq \alpha < \theta$. ゆえに，$\alpha \in H(\theta) \cap \mathbf{ON}$. (4) は，[10, Lemmas 4.1.4] を参照. □

定義 3.3. $A \subseteq \mathbf{V}$ とする．論理式 $\varphi = \varphi(v_1, \cdots, v_n)$ が A に対して絶対的 (absolute) であるとは，任意の $a_1, \cdots, a_n \in A$ に対して，

$$A \vDash \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow \mathbf{V} \vDash \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

が成立することを言う．

例 **3.4.** 論理式 $\varphi(v_1, v_2, v_3) = $ "$(v_2 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_3)$" は，任意の集合 $A \subseteq \mathbf{V}$ に対して絶対的である．なぜなら，任意の $a_1, a_2, a_3 \in A$ に対して，

$$
\begin{aligned}
A \vDash \varphi(a_1, a_2, a_3) &\Leftrightarrow A \vDash \text{``}(a_2 \in a_1) \wedge (a_1 \in a_3)\text{''} \\
&\Leftrightarrow (A \vDash \text{``}a_2 \in a_1\text{''}) \wedge (A \vDash \text{``}a_1 \in a_3\text{''}) \\
&\Leftrightarrow (a_2 \in a_1) \wedge (a_1 \in a_3) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{V} \vDash \varphi(a_1, a_2, a_3).
\end{aligned}
$$

例 **3.5.** 論理式 $\varphi(v_1, v_2) = $ "$v_1 \subseteq v_2$" は，任意の transitive 集合 $A \subseteq \mathbf{V}$ に対して絶対的である．なぜなら，もし A が transitive ならば，任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して，$a_1 \subseteq A$ が成立するから，

$$
\begin{aligned}
A \vDash \varphi(a_1, a_2) &\Leftrightarrow a_1 \cap A \subseteq a_2 \\
&\Leftrightarrow a_1 \subseteq a_2 \Leftrightarrow \mathbf{V} \vDash \varphi(a_1, a_2).
\end{aligned}
$$

ゆえに，φ は A に対して絶対的．他方，$A = R(3) \setminus \{\emptyset\}$, $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $b = \{\{\emptyset\}\}$ とおくと，$a, b \in A$. このとき，例 2.13 で調べたように，$A \vDash$ "$a \subseteq b$" であるが $\mathbf{V} \nvDash$ "$a \subseteq b$". ゆえに，φ はこの A に対しては絶対的でない．

多くの論理式が transitive 集合に対して（特に，$H(\theta)$ に対して）絶対的であることが知られている（[10, Lemma 4.2.8], [12, Ch. 4, §3] を参照）．それらの中から，次の結果だけを述べておこう．

補題 3.6. 論理式 "$f : a \to b$", "$f[a] = b$", "$y = f(x)$" は，$H(\theta)$ に対して絶対的である．

系 3.7. 論理式 $\varphi(a, b) = \exists f\, ((f : a \to b) \wedge (f[a] = b))$ は，$H(\theta)$ に対して絶対的である．

証明. 補題 3.6 より，任意の $a, b \in H(\theta)$ に対して，

$$
H(\theta) \vDash \text{``}(f : a \to b) \wedge (f[a] = b)\text{''} \Leftrightarrow \mathbf{V} \vDash \text{``}(f : a \to b) \wedge (f[a] = b)\text{''}.
$$

このことと補題 3.2 (4) より，任意の $a, b \in H(\theta)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
H(\theta) \vDash \varphi(a, b) &\Leftrightarrow \exists f \in H(\theta)\, (H(\theta) \vDash \text{``}(f : a \to b) \wedge (f[a] = b)\text{''}) \\
&\Leftrightarrow \exists f\, ((f : a \to b) \wedge (f[a] = b)) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{V} \vDash \varphi(a, b).
\end{aligned}
$$

ゆえに，φ は $H(\theta)$ に対して絶対的である． □

最後に反映定理を述べよう．部分クラス $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{ON}$ に対し，任意の有界部分集合 $B \subseteq \mathbf{A}$ に対して $\sup B \in \mathbf{A}$ が成立するとき，$\mathbf{A}$ は $\mathbf{ON}$ で閉であるという．次の定理と補題は [11, Theorem 24.14, Lemma 24.15] であるが，後の応用のためには証明を知る必要はないと思う．

定理 3.8 (Reflection Theorem). 任意の論理式 φ に対して，順序数のクラス $\mathbf{C}_\varphi = \{\alpha \in \mathbf{ON} : \varphi$ は $R(\alpha)$ に対して絶対的 $\}$ は $\mathbf{ON}$ で非有界閉である．

補題 3.9. 順序数のクラス $\mathbf{E} = \{\theta \in \mathbf{CN} : R(\theta) = H(\theta)\}$ は $\mathbf{ON}$ で非有界閉である．

数式 (1.1) と補題 3.9 より，次の等式が成立する．

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\theta \in \mathbf{CN}} H(\theta). \tag{3.1}$$

ある定理 φ が成立すること（すなわち，$\mathbf{V} \vDash \varphi$）を証明しようとするとき，定理 3.8 と補題 3.9 より，$\mathbf{C}_\varphi \cap \mathbf{E}$ はまた $\mathbf{ON}$ で非有界である．したがって，φ に関する議論に必要となるすべての自由変数が $H(\theta)$ に含まれ，φ が $H(\theta)$ に対して絶対的であるような十分大きい θ を選ぶことが出来る．また，任意に大きい cofinality を持つ θ を選ぶことも出来る．このとき，φ の $H(\theta)$ に対する絶対性から

$$H(\theta) \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{V} \vDash \varphi.$$

ゆえに，$\mathbf{V} \vDash \varphi$ の代わりに $H(\theta) \vDash \varphi$ を証明すればよいことになる．これは，実際上は「$\mathbf{V} = H(\theta)$ と考えて証明が進められる」ということである．

4 Elementary Substructures

定義 4.1. $A \subseteq \mathbf{V}$, $B \subseteq \mathbf{V}$ とする．次の条件 (1), (2) が成立するとき，B は A の elementary substructure であるといい，$B \preceq A$ で表す．

(1) $\emptyset \neq B \subseteq A$,

(2) 任意の論理式 $\varphi = \varphi(v_1, \cdots, v_n)$ と任意の $b_1, \cdots, b_n \in B$ に対し，

$$B \vDash \varphi(b_1, \cdots, b_n) \Leftrightarrow A \vDash \varphi(b_1, \cdots, b_n).$$

後の応用では，A はつねに $H(\theta)$ である．$H(\theta)$ は $\mathrm{ZFC} - \mathrm{P}$ のモデル（すなわち，任意の $\varphi \in \mathrm{ZFC} - \mathrm{P}$ に対し $H(\theta) \vDash \varphi$）だから，もし $B \preceq H(\theta)$ ならば，B もまた $\mathrm{ZFC} - \mathrm{P}$ のモデルである．このような場合，B は $H(\theta)$ の elementary submodel と呼ばれる．任意の空でない $A \subseteq \mathbf{V}$ に対し，$A \preceq A$ である．例 2.13 で示した事実から，$A = R(3) \setminus \{\emptyset\}$ とおくと，$A \not\preceq \mathbf{V}$ である．本節では 3 つの基本定理を証明する．

定理 4.2 (Tarski-Vaught). $A \subseteq \mathbf{V}$, $B \subseteq \mathbf{V}$ とする．$B \preceq A$ であるためには，次の条件 (1), (2) が成立することが必要十分．

(1) $\emptyset \neq B \subseteq A$,

(2) 任意の論理式 $\varphi = \varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ と任意の $b_1, \cdots, b_n \in B$ に対し，

$$A \vDash \exists x\, \varphi(x, b_1, \cdots, b_n) \Rightarrow \exists b_0 \in B (A \vDash \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_n)).$$

証明. 必要性．“$B \preceq A$” $\Rightarrow$ (2) を示す．論理式 φ と $b_1, \cdots, b_n \in B$ に対して

$$A \vDash \exists x\, \varphi(x, b_1, \cdots, b_n)$$

であるとする．$B \preceq A$ かつ $b_1, \cdots, b_n \in B$ だから，

$$B \vDash \exists x\, \varphi(x, b_1, \cdots, b_n).$$

相対化の定義より，$\exists x \in B\, (B \vDash \varphi(x, b_1, \cdots, b_n))$．したがって，$b_0 \in B$ で

$$B \vDash \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_n)$$

をみたすものが存在する．このとき，$B \preceq A$ かつ $b_0, b_1, \cdots, b_n \in B$ だから，

$$A \vDash \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_n).$$

ゆえに，(2) が成立する．十分性．原子論理式 φ に対して定義 4.1 の条件 (2) が成立することは明らか．以下，論理式に関する帰納法（定義 2.1 参照）で，任意の論理式 φ が定義 4.1 の条件 (2) を満たすことを示せばよい． □

系 4.3. $M \preceq H(\theta)$, $a \in H(\theta)$ とする．論理式 $\varphi = \varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ と $b_1, \cdots, b_n \in M$ が存在して，任意の $x \in H(\theta)$ に対して，

$$\text{“}x = a\text{”} \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \varphi(x, b_1, \cdots, b_n) \tag{4.1}$$

が成り立つとする．このとき，$a \in M$ である．

証明. $a \in H(\theta)$ だから $\exists x \in H(\theta)(x = a)$．このとき，(4.1) より

$$\exists x \in H(\theta)(H(\theta) \vDash \varphi(x, b_1, \cdots, b_n)).$$

相対化の定義より，$H(\theta) \vDash \exists x\, \varphi(x, b_1, \cdots, b_n)$．したがって，定理 4.2 より，$\exists b_0 \in M(H(\theta) \vDash \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_n))$．(4.1) より，これは $\exists b_0 \in M(b_0 = a)$ を意味する．ゆえに，$a = b_0 \in M$． □

系 4.4. $M \preceq H(\theta)$, $a \in H(\theta)$ とする．論理式 $\psi = \psi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ と $b_1, \cdots, b_n \in M$ が存在して，任意の $y \in H(\theta)$ に対して，

$$\text{“}y \in a\text{”} \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \psi(y, b_1, \cdots, b_n) \tag{4.2}$$

が成り立つとする．このとき，$a \in M$ である．

証明. 任意の $x \in H(\theta)$ をとる．$H(\theta)$ の transitivity より $x \subseteq H(\theta)$ かつ $a \subseteq H(\theta)$ だから，(4.2) より，

$$\begin{aligned}
\text{“}x = a\text{”} &\Leftrightarrow \forall y \in H(\theta)\, (y \in x \leftrightarrow y \in a) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in H(\theta)\, (y \in x \leftrightarrow H(\theta) \vDash \psi(y, b_1, \cdots, b_n)) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in H(\theta)\, (H(\theta) \vDash \text{“}y \in x \leftrightarrow \psi(y, b_1, \cdots, b_n)\text{”}) \\
&\Leftrightarrow H(\theta) \vDash \text{“}\underbrace{\forall y\, (y \in x \leftrightarrow \psi(y, b_1, \cdots, b_n))}_{\varphi(x, b_1, \cdots, b_n)\ \text{と考える．}}\text{”}.
\end{aligned}$$

ゆえに，系 4.3 より $a \in M$. $\square$

系 4.3, 4.4 の条件をみたす集合 a を，M の有限個の元によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合という．それらは M の元である．

例 **4.5.** $M \preceq H(\theta)$, $b_1, b_2 \in M$ のとき，集合 $a = \{y : b_1 \in y \in b_2\} \in H(\theta)$ は M に属する．なぜなら，任意の $y \in H(\theta)$ に対して，

$$\text{“}y \in a\text{”} \Leftrightarrow \text{“}b_1 \in y \in b_2\text{”} \overset{\star}{\Leftrightarrow} H(\theta) \vDash \text{“}b_1 \in y \in b_2\text{”}.$$

ここで，$\star$ の部分の同値は，論理式 $\psi(y, b_1, b_2) = (b_1 \in y) \wedge (y \in b_2)$ の $H(\theta)$ に対する絶対性による（例 3.4）．ゆえに，a は M の元 b_1, b_2 によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.4 より $a \in M$.

> 註. 上の例では，なぜ $a \in H(\theta)$ が成立するのかも心配になるかも知れない．$a = \{y \in b_2 : b_1 \in y\}$ とかけるから，$H(\theta)$ が内包性の公理（すなわち，b が集合のとき $\{x \in b : \varphi(x)\}$ も集合）をみたすことから，$a \in H(\theta)$ である．

実際の応用の際には，前節の最後に述べたように，十分大きな θ を選ぶことによって，$\mathbf{V} = H(\theta)$ であると考えて証明を進めることが出来る．この場合，数式 (4.1), (4.2) における “$H(\theta) \vDash \varphi$” や “$H(\theta) \vDash \psi$” はそれぞれ単に “φ” や “ψ” であると考えてよく，絶対性に関する考慮は不必要になる．

定理 **4.6** (Löwenheim-Skolem). $X \subseteq A \subseteq \mathbf{V}$ で A は無限集合であるとする．このとき，$B \preceq A$, $X \subseteq B$ かつ $|B| \leq |X| + \omega$ をみたす集合 B が存在する．

証明. 帰納法により，$|X_k| \leq |X| + \omega$, $k < \omega$, をみたす集合列

$$X \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots \subseteq A$$

を以下のように構成する．$X_0 = X$ とおいて，いま X_k が定義できたと仮定する．論理式 $\varphi = \varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ と有限個の元 $b_1, \cdots, b_n \in X_k$ で

$$A \vDash \exists x \, \varphi(x, b_1, \cdots, b_n)$$

をみたすものの組 $\langle \varphi, b_1, \cdots, b_n \rangle$ 全体の集合を Ξ_k とおく．このとき，任意の $\xi = \langle \varphi, b_1, \cdots, b_n \rangle \in \Xi_k$ に対して，相対化の定義より

$$\exists x \in A \, (A \vDash \varphi(x, b_1, \cdots, b_n)).$$

そこで，$a_\xi \in A$ で $A \vDash \varphi(a_\xi, b_1, \cdots, b_n)$ をみたすものを 1 つ選んで，

$$X_{k+1} = \{a_\xi : \xi \in \Xi_k\} \cup X_k$$

とおく．論理式全体の集合の濃度は可算だから，$|X_{k+1}| \leq |X| + \omega$. 次に $B = \bigcup \{X_k : k < \omega\}$ とおくと，$|B| \leq |X| + \omega$. 定理 4.2 を使って $B \preceq A$ で

あることを示す．論理式 φ と $b_1, \cdots, b_n \in B$ に対し，$A \vDash \exists x\, \varphi(x, b_1, \cdots, b_n)$ であるとする．B の定義より，ある $k < \omega$ が存在して，$\{b_1, \cdots, b_n\} \subseteq X_k$. いま $\xi = \langle \varphi, b_1, \cdots, b_n \rangle$ とおくと，$\xi \in \Xi_k$ だから，$a_\xi \in X_{k+1}$ かつ $A \vDash \varphi(a_\xi, b_1, \cdots, b_n)$. このとき $a_\xi \in B$ だから，$\exists b_0 \in B\, (A \vDash \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_n))$ が成り立つ. ゆえに，定理 4.2 より $B \preceq A$. □

補題 4.7. $M \preceq H(\theta), \theta > \omega$ とする．

(1) $\omega \subseteq M$,

(2) $\omega \in M$, もし $\theta > \omega_1$ ならば $\omega_1 \in M$,

(3) 任意の有限集合 $a \subseteq M$ に対し，$a \in M$.

証明. (1) 補題 3.2 (3) より，$\omega \subseteq H(\theta)$ であることに注意.

(i) $0 \in M$ を示す．いま $0 \in H(\theta)$. 任意の $y \in H(\theta)$ に対して，

$$\text{“}y \in 0\text{”} \Leftrightarrow \text{“}y \neq y\text{”} \overset{\star}{\Leftrightarrow} H(\theta) \vDash \text{“}y \neq y\text{”}.$$

ここで，$\star$ の部分の同値は，論理式 $\psi(y) = \text{“}y \neq y\text{”}$ の $H(\theta)$ に対する絶対性による．ゆえに，0 は M の 0 個の元によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.4 より $0 \in M$.

> 系 **4.3** を使った別証明. $0 \in H(\theta)$. 任意の $x \in H(\theta)$ に対して，“$x = 0$” $\Leftrightarrow$ “$\forall y \in x\, (y \neq y)$” $\Leftrightarrow$ $H(\theta) \vDash$ “$\forall y \in x\, (y \neq y)$”. すなわち，0 は M の 0 個の元によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $0 \in M$.

(ii) $n \in M$ であると仮定して，$n + 1\, (= n \cup \{n\}) \in M$ を示す．$\omega \subseteq H(\theta)$ だから，$n + 1 \in H(\theta)$．任意の $y \in H(\theta)$ に対して，

$$\text{“}y \in n+1\text{”} \Leftrightarrow \text{“}(y \in n) \vee (y = n)\text{”} \overset{\star}{\Leftrightarrow} H(\theta) \vDash \text{“}(y \in n) \vee (y = n)\text{”}.$$

ここで，$\star$ の部分の同値は，論理式 $\psi(y, n) = \text{“}(y \in n) \vee (y = n)\text{”}$ の $H(\theta)$ に対する絶対性による．ゆえに，$n + 1$ は M の元 n によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.4 より $n + 1 \in M$.

(2) 補題 3.2 (3) より，$\omega \in H(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \text{“}x \neq 0\text{”} = \exists y \in x\, (y = y),\\
\varphi_1(x) &= \text{“}x \text{ is transitive”} = \forall y \in x\, (\forall z \in y\, (z \in x)),\\
\varphi_2(x) &= \text{“}x \text{ is an ordinal”} = \varphi_1(x) \wedge (\forall y \in x\, (\varphi_1(x))),\\
\varphi_3(x) &= \text{“}x \text{ is a limit”} = \forall y \in x\, (\exists z \in x\, (y \in z)) \wedge \varphi_0(x)
\end{aligned}$$

とおくと，$\varphi(x) = \varphi_2(x) \wedge \varphi_3(x) \wedge \forall y \in x\, (\neg \varphi_3(y))$ は “$x = \omega$” と同値. このとき，φ は $H(\theta)$ に対して絶対的（原理的には相対化の定義を繰り返し使っ

て示すことが出来る．[12, Ch. IV, Theorem 5.1] 参照）．したがって，任意の $x \in H(\theta)$ に対して，

$$“x = \omega” \Leftrightarrow \varphi(x) \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \varphi(x).$$

ゆえに，ω は M の 0 個の元によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $\omega \in M$. 次に，$\theta > \omega_1$ とすると，補題 3.2 (3) より $\omega_1 \in H(\theta)$.

$$\varphi_4(x, \omega) = “|x| \leq \omega” = \exists f\,((f : \omega \to x) \wedge (f[\omega] = x))$$

とおくと，$\psi(x, \omega) = \varphi_2(x) \wedge \neg\varphi_4(x, \omega) \wedge \forall y \in x\,(\varphi_4(y, \omega))$ は “$x = \omega_1$” と同値．このとき，φ_2 の $H(\theta)$ に対する絶対性と系 3.7 より，ψ は $H(\theta)$ に対して絶対的．したがって，任意の $x \in H(\theta)$ に対して，

$$“x = \omega_1” \Leftrightarrow \psi(x, \omega) \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \psi(x, \omega).$$

ゆえに，ω_1 は M の元 ω によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $\omega_1 \in M$.

(3) $a = \{b_1, \cdots, b_n\} \subseteq M$ とおく．$b_1, \cdots, b_n \in H(\theta)$ だから，$a \in H(\theta)$. $\psi(y, b_1, \cdots, b_n) = “(y = b_1) \vee \cdots \vee (y = b_n)”$ とおくと，ψ は $H(\theta)$ に対して絶対的．ゆえに，任意の $y \in H(\theta)$ に対して，

$$“y \in a” \Leftrightarrow \psi(y, b_1, \cdots, b_n) \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \psi(y, b_1, \cdots, b_n).$$

すなわち，a は M の n 個の元 $b_1, \cdots, b_n$ によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.4 より $a \in M$. □

補題 4.7 (3) の性質を，M は有限集合について閉じているという．有限を可算に変えた場合の議論が後の補題 5.9 にある．

定理 4.8. $M \preceq H(\theta), \theta > \omega$ とする．このとき，任意の $a \in M$ に対し，もし $|a| \leq \omega$ ならば $a \subseteq M$ が成り立つ．

証明．いま $|a| \leq \omega$ だから，全射 $f : \omega \to a$ が存在する．$\omega, a \in H(\theta)$ だから，補題 3.2 (4) より $f \in H(\theta)$. したがって，

$$\exists f \in H(\theta)\,(\underbrace{(f : \omega \to a) \wedge (f[\omega] = a)}_{\varphi(f,\omega,a)\text{ とおく．}}). \tag{4.3}$$

このとき，補題 3.6 より φ は $H(\theta)$ に対して絶対的．$f, \omega, a \in H(\theta)$ だから，

$$\varphi(f, \omega, a) \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \varphi(f, \omega, a). \tag{4.4}$$

$M \preceq H(\theta)$ かつ $\omega, a \in M$ だから，(4.3), (4.4) と定理 4.2 より，

$$\exists f_0 \in M\,((f_0 : \omega \to a) \wedge (f_0[\omega] = a)).$$

したがって，任意の $n \in \omega$ に対して，$f_0(n) \in M$ を示せばよい．$H(\theta)$ は transitive だから，$f_0[\omega] = a \subseteq H(\theta)$．ゆえに，$f_0(n) \in H(\theta)$．$\psi(x, f_0, n) =$ "$x = f_0(n)$" とおくと，補題 3.6 より ψ は $H(\theta)$ に対して絶対的．ゆえに，任意の $x \in H(\theta)$ に対して

$$x = f_0(n) \Leftrightarrow \psi(x, f_0, n) \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \psi(x, f_0, n).$$

また，補題 4.7 (1) より $n \in M$．ゆえに，$f_0(n)$ は M の元 f_0, n によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $f_0(n) \in M$．結果として，$a = \{f_0(n) : n \in \omega\} \subseteq M$. □

系 **4.9.** $M \preceq H(\theta)$, $\theta > \omega$, $|M| \leq \omega$ とする．このとき，極限順序数 $\delta < \omega_1$ が存在して，$\omega_1 \cap M = \delta$ が成立する．

証明. $|M| \leq \omega$ だから，$\omega_1 \cap M$ は ω_1 で有界．$\delta = \sup(\omega_1 \cap M)$ とおくと，定理 4.8 より，$\omega_1 \cap M = \delta$．もし $\delta = \beta + 1$ ならば，δ は $\beta \in M$ によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $\delta \in M$ となり矛盾．ゆえに，δ は極限順序数である． □

定理 4.8 の証明の鍵は，2 つの事実 $\omega \in M$, $\omega \subseteq M$ である（補題 4.7）．したがって，この定理は次のように一般化される．

定理 **4.10.** $M \preceq H(\theta)$, $\theta > \omega$, $\kappa \in \mathbf{CN}$, $\kappa \in M$, $\kappa \subseteq M$ とする．このとき，任意の集合 $a \in M$ に対し，もし $|a| \leq \kappa$ ならば $a \subseteq M$.

練習 **6.** 定理 4.10 を証明せよ．

参考書．Tarski-Vaught の定理 4.2 は，[1, Theorem 1.7], [10, Lemma 4.2.2], [11, Theorem 24.4]. 系 4.3, 4.4 は，それぞれ [10, Lemma 4.2.13, 4.2.14] と本質的に同じである．Löwenheim-Skolem の定理 4.6 は，[1, Theorem 1.8 (a)], [8, Theorem 1.1], [10, Theorem 4.2.3], [11, Corollary 24.13]. 補題 4.7 (1), (2) は，[10, Example 4.2.15 (b)]. 補題 4.7 (3) は，[11, Exercise 24.22]. 定理 4.8, 4.10 は，[1, Theorem 1.10], [8, Theorem 1.6], [11, Corollary 24.22]. 系 4.9 は，[1, Theorem 1.10], [11, Claim 24.23].

5　応用例 I

定理 5.1 (A. V. Arhangel'skiĭ). (X,τ) は Hausdorff 空間で $nw(X,\tau)=\kappa$ であるとする．このとき，X 上の位相 $\tau_0 \subseteq \tau$ で，(X,τ_0) は Hausdorff 空間かつ $w(X,\tau_0) \le \kappa$ をみたすものが存在する．

系 5.2 (A. V. Arhangel'skiĭ). 任意のコンパクト Hausdorff 空間 X に対し，$nw(X)=w(X)$.

定理 5.1 の証明 ([11, Lemma 24.29]). 最初に，$\kappa \ge \omega$ であると仮定してよい．$nw(X,\tau)=\kappa$ だから，(X,τ) のネット $\mathcal{N}$ で $|\mathcal{N}|=\kappa$ をみたすものが存在する．反映定理 3.8 より，十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明すればよい（すなわち，$\mathbf{V}=H(\theta)$ であると考えてよい）．定理 4.6 より，$M \preceq H(\theta)$ で

$$\mathcal{N}\cup\{\tau\}\subseteq M \quad \text{and} \quad |M|=\kappa$$

をみたすものが存在する．このとき，$\tau\cap M$ から生成される位相 τ_0 が求めるものである．明らかに，$\tau_0\subseteq\tau$ かつ $w(X,\tau_0)\le\kappa$. したがって，(X,τ_0) が Hausdorff であることを示せば十分．任意の異なる 2 点 $x,y\in X$ をとる．(X,τ) は Hausdorff だから，$U,V\in\tau$ で

$$x\in U,\quad y\in V \quad \text{and} \quad U\cap V=\emptyset$$

をみたすものが存在する（ここで，$U,V\in M$ とは限らないことに注意）．$\mathcal{N}$ はネットだから，$K,L\in\mathcal{N}$ で

$$x\in K\subseteq U \quad \text{and} \quad y\in L\subseteq V$$

をみたすものが存在する（ここで，$K,L\in M$ に注意）．結果として，

$$H(\theta)\models \exists U,V\,(\underbrace{U\in\tau\wedge V\in\tau\wedge K\subseteq U\wedge L\subseteq V\wedge U\cap V=\emptyset}_{\varphi(U,V,\tau,K,L)}).$$

このとき，上の論理式 φ の自由変数は U, V, τ, K, L. "$\models$" より右の部分全体の自由変数は $\tau,K,L\in M$ だから，定理 4.2 より

$$\begin{aligned}\exists U_0,V_0\in M\,(H(\theta)\models \text{“}U_0\in\tau\wedge V_0\in\tau\\ \wedge K\subseteq U_0\wedge L\subseteq V_0\wedge U_0\cap V_0=\emptyset\text{”}).\end{aligned}$$

いま $\mathbf{V}=H(\theta)$ と考えられるから，これは，$U_0,V_0\in M$ で

$$U_0\in\tau,\ V_0\in\tau,\ K\subseteq U_0,\ L\subseteq V_0 \ \text{and}\ U_0\cap V_0=\emptyset$$

をみたすものが存在することを意味する．$U_0,V_0\in\tau\cap M$ だから，(X,τ_0) は Hausdorff. □

注意 5.3. 位相空間 (X, τ) に対し，$\{X, \tau\} \subseteq M \preceq H(\theta)$ とする．このとき，$\sigma = \tau \cap M$ は X 上の位相であるとは限らないが，σ を基底とする位相を生成することが出来る．実際，M のとり方により $X \in \sigma$, 補題 4.7 (1) より $\emptyset \in \sigma$. 任意の $U_1, U_2 \in \sigma$ に対し，$U_1 \cap U_2$ は $U_1, U_2 \in M$ によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $U_1 \cap U_2 \in \sigma$. しかし，σ は和集合について閉じているとは限らない（[11, p. 176] 参照）.

集合族 $\mathcal{A}$ は，ある集合 r が存在して，$\forall a, a' \in \mathcal{A}\,(a \neq a' \to a \cap a' = r)$ が成立するとき，Δ-system であるという．

定理 5.4 (Δ-system lemma). 有限集合からなる任意の非可算集合族 $\mathcal{A}$ は，非可算 Δ-system を含む．

証明. 反映定理 3.8 より，十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明すればよい（すなわち，$\mathbf{V} = H(\theta)$ であると考えてよい）. 定理 4.6 より，$M \preceq H(\theta)$ で，

$$\mathcal{A} \in M \quad \text{and} \quad |M| = \omega$$

をみたすものが存在する．$\mathcal{A}$ は非可算で M は可算だから，$\mathcal{A} \setminus M \neq \emptyset$. $\beta \in \mathcal{A} \setminus M$ を任意に選び，$r = \beta \cap M$ とおく．このとき，補題 4.7 (3) より $r \in M$. 集合族 $\mathcal{D}$ に関する論理式

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{D}, \mathcal{A}, r) = \text{“}\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}\text{”} \wedge \text{“}\forall a, a' \in \mathcal{D}\,(a \neq a' \to a \cap a' = r)\text{”} \\ \wedge \text{“}\forall a \in \mathcal{D}\,(a \supseteq r)\text{”}\end{aligned}$$

を考え，$\Phi = \{\mathcal{D} : \varphi(\mathcal{D}, \mathcal{A}, r)\}$ とおく．$\{\beta\} \in \Phi$ だから，$\Phi \neq \emptyset$. したがって，Zorn の補題より Φ の極大元が存在する．すなわち，

$$H(\theta) \vDash \exists \mathcal{D}\,(\underbrace{\mathcal{D} \text{ is a maximal element of } \Phi}_{\varphi_0(\mathcal{D}, \mathcal{A}, r)}). \tag{5.1}$$

ここで，$\varphi_0(\mathcal{D}, \mathcal{A}, r) = \varphi(\mathcal{D}, \mathcal{A}, r) \wedge \forall X\,((\mathcal{D} \subseteq X \wedge \varphi(X, \mathcal{A}, r)) \to \mathcal{D} = X)$. 論理式 φ_0 の自由変数は $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$, r. (5.1) の “$\vDash$” より右の部分全体の自由変数は $\mathcal{A}, r \in M$ だから，定理 4.2 より

$$\exists \mathcal{D}_0 \in M\,(H(\theta) \vDash \text{“}\mathcal{D}_0 \text{ is a maximal element of } \Phi\text{”}).$$

このとき，$\mathcal{D}_0$ が求めるものである．$\mathcal{D}_0$ が非可算であることを示せばよい．もし $\mathcal{D}_0$ が高々可算ならば，定理 4.8 より $\mathcal{D}_0 \subseteq M$. $\beta \notin M$ だから，$\beta \notin \mathcal{D}_0$. また，任意の $a \in \mathcal{D}_0$ に対し，$a \in M$ だから，定理 4.8 より $a \subseteq M$. ゆえに，$\mathcal{D}_0 \cup \{\beta\} \in \Phi$. これは $\mathcal{D}_0$ の極大性に矛盾する．□

任意の $f \in \omega^\kappa$ に対し，$\mathrm{supp}(f) = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \neq 0\}$ とおく．直積空間 ω^κ の部分空間 $\Sigma^\kappa \omega = \{f \in \omega^\kappa : |\mathrm{supp}(f)| \leq \omega\}$ について考える．

定理 5.5. $\kappa > \omega$ に対し，$\Sigma^\kappa \omega$ は正規である．

証明. 玉野 [13] を読もう.

注意 **5.6.** M. E. Rudin-S. P. Gulko の定理「任意の距離空間の Σ-product は正規である」の elementary submodel を使った証明が K. Tamano [14] によって与えられた.

定理 **5.7.** 点可算基底を持つ可算コンパクト空間 $X = (X, \tau)$ は可分である.

系 **5.8** (A. Miščenko). 点可算基底を持つコンパクト Hausdorff 空間は距離化可能である.

定理 **5.7** の証明 ([8, Example 2.5]). 反映定理 3.8 より，十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明すればよい（すなわち，$\mathbf{V} = H(\theta)$ であると考えてよい）. 定理 4.6 より，$M \preceq H(\theta)$ で

$$\{X, \tau\} \subseteq M \quad \text{and} \quad |M| = \omega$$

をみたすものが存在する. 可算集合 $X \cap M$ が X で稠密であることを示す. X は点可算基底を持つから,

$$H(\theta) \vDash \exists \mathcal{B} \, (\underbrace{\mathcal{B} \text{ is a point-countable base of } X}_{\varphi(\mathcal{B}, X, \tau, \omega).}).$$

上の $(\cdots)$ 内は自由変数が $\mathcal{B}, X, \tau, \omega$ である論理式 φ で表される. “$\vDash$” より右の部分全体の自由変数は $X, \tau, \omega \in M$ だから，定理 4.2 より,

$$\exists \mathcal{B}_0 \in M \, (H(\theta) \vDash \text{“}\mathcal{B}_0 \text{ is a point-countable base of } X\text{”}).$$

$\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B}_0 : B \cap M \neq \emptyset\}$ とおく. $\mathcal{B}_0$ は点可算で $|M| = \omega$ だから, $|\mathcal{B}_1| \leq \omega$.

主張 **1**. $\mathcal{B}_1 \subseteq M$.

証明. 各 $y \in X \cap M$ に対し，$\mathcal{B}_y = \{B : y \in B \in \mathcal{B}_0\}$ とおくと,

$$\mathcal{B}_1 = \bigcup \{\mathcal{B}_y : y \in X \cap M\}. \tag{5.2}$$

各 $\mathcal{B}_y$ は M の 2 元 $y, \mathcal{B}_0$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.4 より $\mathcal{B}_y \in M$（例 4.5 参照）. $\mathcal{B}_0$ は点可算だから，$|\mathcal{B}_y| \leq \omega$. したがって，定理 4.8 より，$\mathcal{B}_y \subseteq M$. ゆえに，(5.2) より $\mathcal{B}_1 \subseteq M$. □

いま，点 $z \in X \setminus \mathrm{cl}_X(X \cap M)$ が存在したとする. このとき，$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_1$ で,

$$\mathrm{cl}_X(X \cap M) \subseteq \bigcup \mathcal{U} \quad \text{and} \quad z \notin \bigcup \mathcal{U}$$

をみたすものが存在する. $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{B}_1| \leq \omega$ かつ X は可算コンパクトだから，$\mathrm{cl}_X(X \cap M)$ の有限被覆 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ をとることが出来る. このとき,

$$X \cap M \subseteq \bigcup \mathcal{V} \quad \text{and} \quad X \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}. \tag{5.3}$$

主張 1 より $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq M$ だから，補題 4.7 (3) より $\mathcal{V} \in M$. 他方，(5.3) は次を意味する（例 2.13 参照）.

$$M \models \text{“}X \subseteq \bigcup \mathcal{V}\text{”} \quad \text{and} \quad H(\theta) \not\models \text{“}X \subseteq \bigcup \mathcal{V}\text{”}. \tag{5.4}$$

ここで，“$X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$” は自由変数が $X, \mathcal{V} \in M$ である論理式によって表現される（例 2.4 参照）. ゆえに，(5.4) は $M \preceq H(\theta)$ であることに矛盾する. □

集合 M に対し，$[M]^{\leq\kappa} = \{x \subseteq M : |x| \leq \kappa\}$ とおく. $[M]^{\leq\omega} \subseteq M$ が成り立つとき，M は高々可算集合について閉じているという. $\mathrm{cf}(\theta)$ は θ の cofinality を表す.

補題 5.9. $X \subseteq H(\theta)$, $|X| \leq \mathfrak{c}$, $\mathrm{cf}(\theta) > \omega$ とする. このとき，$M \preceq H(\theta)$, $X \subseteq M$ と $|M| \leq \mathfrak{c}$ をみたし，高々可算集合について閉じている集合 M が存在する.

証明. 超限帰納法により，$|M_\alpha| \leq \mathfrak{c}$, $\alpha < \omega_1$, である長さ ω_1 の集合列

$$X \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1} \subseteq \cdots \subseteq H(\theta)$$

を以下のように構成する. $M_0 = X$ とおいて，いま $M_\beta \subseteq H(\theta)$, $\beta < \alpha$, が定義できたと仮定する. $\alpha = \beta + 1$ のとき，次が成り立つ.

$$[M_\beta]^{\leq\omega} \subseteq H(\theta) \tag{5.5}$$

なぜなら，任意の $x \in [M_\beta]^{\leq\omega}$ に対し，[12, Chap. III, Lemma 3.5 (f)] より，$\mathrm{trcl}(x) = x \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(y) : y \in x\}$. いま $x \subseteq M_\beta \subseteq H(\theta)$ だから，任意の $y \in x$ に対し $|\mathrm{trcl}(y)| < \theta$. $|x| \leq \omega$ かつ $\mathrm{cf}(\theta) > \omega$ だから，$|\mathrm{trcl}(x)| < \theta$. すなわち，$x \in H(\theta)$. ゆえに，(5.5) が成立する. したがって，定理 4.6 より，

$$M_\beta \cup [M_\beta]^{\leq\omega} \subseteq M_\alpha \preceq H(\theta) \quad \text{and} \quad |M_\alpha| \leq \mathfrak{c} \tag{5.6}$$

をみたす集合 M_α が存在する. α が極限順序数のときは，$M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ とおく. 最後に，$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ とおくと，$|M| \leq \mathfrak{c}$. このとき，定理 4.2 より，$M \preceq H(\theta)$ が導かれる. また，構成法より $[M]^{\leq\omega} \subseteq M$. □

定理 5.10 (A. V. Arhangel'skiĭ). 第 1 可算公理をみたす Lindelöf, Hausdorff 空間 $X = (X, \tau)$ に対して，$|X| \leq \mathfrak{c}$ が成り立つ.

証明 ([8, Example 2.2], [11, Theorem 24.31]). 反映定理 3.8 より，$\mathrm{cf}(\theta) > \omega$ を満たす十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明すればよい. 補題 5.9 より，$M \preceq H(\theta)$ で

$$\{X, \tau\} \subseteq M, \ |M| = \mathfrak{c} \ \text{and} \ [M]^{\leq\omega} \subseteq M$$

を満たすものが存在する. $X \subseteq M$ を示す.

主張 1. $X \cap M$ は X の閉集合である．

証明. もし $x \in \mathrm{cl}_X(X \cap M) \setminus M$ である x が存在したと仮定する．X は第 1 可算公理を満たすから，x に収束する $X \cap M$ の点列 $\{y_n\}$ が存在する．このとき，$Y = \{y_n : n < \omega\}$ とおくと，$x \in (\mathrm{cl}_X Y) \setminus Y$. すなわち，

$$H(\theta) \models \exists x\,(x \in (\mathrm{cl}_X Y) \setminus Y). \tag{5.7}$$

上の $(\cdots)$ 内は，次の論理式 φ によって表現される．

$$\varphi(x, X, \tau, Y) = (x \in X \setminus Y) \wedge (\forall U \in \tau\,(x \in U \to U \cap Y \neq \emptyset)).$$

M の選び方より $X, \tau \in M$. また，M は高々可算集合について閉じているから $Y \in M$. (5.7) の "$\models$" より右の部分全体の自由変数は $X, \tau, Y \in M$ だから，定理 4.2 より，

$$\exists x_0 \in M\,(H(\theta) \models \text{“}x_0 \in (\mathrm{cl}_X Y) \setminus Y\text{”}).$$

いま，X は Hausdorff だから，収束点列 $Y = \{y_n\}$ に対して $x \in (\mathrm{cl}_X Y) \setminus Y$ をみたす点 x は一意的に定まるから，$x = x_0 \in M$.　これは，$x \notin M$ であったことに矛盾する．ゆえに，$X \cap M$ は X の閉集合である． □

主張 2. 任意の $y \in X \cap M$ に対し，y の X における可算近傍基底 $\mathcal{B}_y$ で $\mathcal{B}_y \subseteq M$ をみたすものが存在する．

証明. $y \in X \cap M$ とする．X は第 1 可算公理をみたすから，y の X における可算近傍基底 $\mathcal{B}$ が存在する．すなわち，

$$H(\theta) \models \exists \mathcal{B}\,(\mathcal{B} \text{ is a countable local base of } y \text{ in } X).$$

上の $(\cdots)$ 内は自由変数が $\mathcal{B}$, y, τ, ω, X である論理式で表される．"$\models$" より右の部分全体の自由変数は $y, \tau, \omega, X \in M$ だから，定理 4.2 より，

$$\exists \mathcal{B}_y \in M\,(H(\theta) \models \text{“}\mathcal{B}_y \text{ is a countable local base of } y \text{ in } X\text{”}).$$

このとき，$\mathcal{B}_y \in M$ かつ $|\mathcal{B}_y| \leq \omega$ だから，定理 4.8 より $\mathcal{B}_y \subseteq M$. □

最後に，点 $z_0 \in X \setminus M$ が存在したと仮定する．このとき，各 $y \in X \cap M$ に対して，主張 2 より，$z_0 \notin U_y$ をみたす $U_y \in \mathcal{B}_y$ が存在する．$\mathcal{B}_y \subseteq M$ だから，$U_y \in M$. 主張 1 より $X \cap M$ は Lindelöf だから，$X \cap M$ の可算被覆 $\mathcal{V} \subseteq \{U_y : y \in X \cap M\}$ が存在する．このとき，

$$X \cap M \subseteq \bigcup \mathcal{V} \quad \text{and} \quad X \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}. \tag{5.8}$$

(5.8) は次を意味する（例 2.13 参照）．

$$M \models \text{“}X \subseteq \bigcup \mathcal{V}\text{”} \quad \text{and} \quad H(\theta) \not\models \text{“}X \subseteq \bigcup \mathcal{V}\text{”}. \tag{5.9}$$

M は高々可算集合について閉じているから，$\mathcal{V} \in M$. また，M の選び方より $X \in M$. ゆえに，(5.9) は $M \preceq H(\theta)$ であることに矛盾する． □

6　応用例 II

定義 6.1. 集合 M が *ω-covering property* を持つとは，任意の $a \in [M]^{\leq\omega}$ に対し，$a \subseteq b$ をみたす $b \in M \cap [M]^{\leq\omega}$ が存在することをいう．高々可算集合について閉じている M は ω-covering property を持つ．

補題 6.2. $X \subseteq H(\theta)$, $|X| \leq \omega$, $\mathrm{cf}(\theta) > \omega$ とする．このとき，$M \preceq H(\theta)$, $X \subseteq M$ と $|M| \leq \omega_1$ を満たし，ω-covering property を持つ集合 M が存在する．

証明. 補題 5.9 の証明で，$\mathfrak{c}$ を $|X| + \omega_1$ に置き換え，数式 (5.6) を

$$M_\beta \cup \{M_\beta\} \subseteq M_\alpha \preceq H(\theta) \quad \text{and} \quad |M_\alpha| \leq \omega \tag{6.1}$$

に変えると，同様に証明できる． □

定義 6.3. 位相空間 $X = (X, \tau)$ と $Y \subseteq X$ が与えられたとする．このとき，$\mathcal{B}$ が Y に対する**相対基底** (relative base for Y) であるとは，$\mathcal{B} \subseteq \tau$ かつ，

$$\forall x \in Y\,(\forall U \in \tau\,(x \in U \to \exists V \in \mathcal{B}\,(x \in V \cap Y \subseteq U)))$$

が成り立つことをいう．定義より，$w(Y) \leq \omega$ であるためには，Y に対する可算相対基底が存在することが必要十分である．

定理 6.4 (I. Juhász). 位相空間 $X = (X, \tau)$ の濃度 $\leq \omega_1$ である任意の部分空間が第 2 可算公理をみたすならば．X も第 2 可算公理をみたす．

証明 ([8, Proposition 3.2]). 最初に，X の任意の部分空間は可分であることを注意しておこう．

> 註. なぜなら，もし可分でない X の部分空間が存在したならば，各 $\alpha < \omega_1$ に対して，$x_\alpha \notin \mathrm{cl}_X\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ をみたす集合 $Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$ を作ることができる．このとき，$|Y| = \omega_1$ かつ $w(Y) > \omega$ だから仮定に矛盾する．

反映定理 3.8 より，$\mathrm{cf}(\theta) > \omega$ を満たす十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明すればよい．補題 6.2 より，ω-covering property を持つ $M \preceq H(\theta)$ で，

$$\{X, \tau\} \subseteq M \quad \text{and} \quad |M| \leq \omega_1$$

をみたすものが存在する．

主張 1. $\tau \cap M$ は $X \cap M$ に対する相対基底である．

証明. 任意の $x \in X \cap M$ と $U \in \tau$ で $x \in U$ をみたすものをとる．最初に述べた注意から，$(X \cap M) \setminus U$ の可算稠密部分集合 D が存在する．M は

ω-covering property を持つから，$D \subseteq b$ をみたす可算集合 $b \in M$ が存在する．$Z = (b \cap X) \cup \{x\}$ とおく．このとき，Z は $b, X, x \in M$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $Z \in M$. $|Z| = \omega$ だから，仮定より $w(Z) \leq \omega$. ゆえに，Z に対する可算相対基底 $\mathcal{B}$ が存在する．すなわち，

$$H(\theta) \models \exists \mathcal{B} \, (\mathcal{B} \text{ is a countable relative base for } Z).$$

上の $(\cdots)$ 内は自由変数が $\mathcal{B}$, τ, ω, Z である論理式で表現される．"$\models$" より右の部分全体の自由変数は $\tau, \omega, Z \in M$ だから，定理 4.2 より，

$$\exists \mathcal{B}_0 \in M \, (H(\theta) \models \text{"}\mathcal{B}_0 \text{ is a countable relative base for } Z\text{"}).$$

このとき，$\mathcal{B}_0 \in M$ かつ $|\mathcal{B}_0| \leq \omega$ だから，定理 4.8 より $\mathcal{B}_0 \subseteq M$. ゆえに．$\mathcal{B}_0 \subseteq \tau \cap M$. したがって，$\tau \cap M$ もまた Z に対する相対基底である．結果として，$x \in V \cap Z \subseteq U$ をみたす $V \in \tau \cap M$ が存在する．このとき，$V \cap D = \emptyset$ だから，$x \in V \cap (X \cap M) \subseteq U$. ゆえに，$\tau \cap M$ は $X \cap M$ に対する相対基底である． □

いま，$|X \cap M| \leq |M| = \omega_1$ だから，仮定より $w(X \cap M) \leq \omega$. したがって，主張 1 より，$X \cap M$ に対する可算相対基底 $\mathcal{B}$ で $\mathcal{B} \subseteq \tau \cap M$ をみたすものが存在する．M は ω-covering property を持つから，$\mathcal{B} \in M$ であると考えてよい．

> 註．最後の部分を詳しく説明すると，M の ω-covering property より，$\mathcal{B} \subseteq b$ をみたす可算集合 $b \in M$ が存在する．$\mathcal{B}' = b \cap \tau$ とおく．このとき，$\mathcal{B}'$ は $b, \tau \in M$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $\mathcal{B}' \in M$. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \tau$ だから，$\mathcal{B}'$ も $X \cap M$ に対する相対基底．$|\mathcal{B}'| \leq \omega$ だから，定理 4.8 より $\mathcal{B}' \subseteq M$. ゆえに，$\mathcal{B}$ の代わりに $\mathcal{B}'$ を考えることが出来る．

最後に，$\mathcal{B}$ が X の可算基底であることを示そう．いま $\mathcal{B} \subseteq M$ だから，$\mathcal{B} \cap M = \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ は $X \cap M$ に対する相対基底だから，次が成立する．

$$\forall x \in X \cap M \, (\forall U \in \tau \cap M \, (x \in U \to \exists V \in \mathcal{B} \cap M \, (x \in V \cap M \subseteq U)))$$

相対化の定義より，これは次を意味する（例 2.11, 2.13 参照）．

$$M \models \text{"}\underbrace{\forall x \in X \, (\forall U \in \tau \, (x \in U \to \exists V \in \mathcal{B} \, (x \in V \subseteq U)))}_{\varphi(X,\tau,\mathcal{B}) \text{ とおく．}}\text{"}.$$

このとき，上の論理式 φ の自由変数は $X, \tau, \mathcal{B} \in M$. $M \preceq H(\theta)$ だから，$H(\theta) \models \varphi(X, \tau, \mathcal{B})$. ゆえに，$\mathcal{B}$ は X の可算基底である． □

練習 7. 補題 6.2 の証明を完成させよ．

定義 6.5. 集合 X 上の位相 τ と $x \in Y \subseteq X$ が与えられたとする．このとき，$\mathcal{B}$ が (x, Y, τ) に対する相対基底 (relative base for (x, Y, τ)) であるとは，$\mathcal{B} \subseteq \tau$ かつ

$$\forall U \in \tau \, (x \in U \to \exists V \in \mathcal{B} \, (x \in V \cap Y \subseteq U))$$

が成り立つことをいう．位相空間 (X, τ) と $Y \subseteq X$ が与えられたとき，もし $\mathcal{B}$ が任意の $x \in Y$ に対して (x, Y, τ) に対する相対基底ならば，$\mathcal{B}$ は Y に対する相対基底である（定義 6.3 参照）．

位相空間 (X, τ) と $Y \subseteq X$ に対して，Y の部分空間の位相を $\tau|_Y$ で表す，すなわち，$\tau|_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

定理 6.6 (A. Dow). 可算コンパクト空間 $X = (X, \tau)$ の濃度 $\leq \omega_1$ である任意の部分空間が距離化可能ならば，X も距離化可能である．

証明 ([8, Theorem 3.1]). X の濃度 $\leq \omega_1$ である任意の部分空間が距離化可能であるにもかかわらず，X が距離化可能でないと仮定して矛盾を導く．反映定理 3.8 より，$\theta > \omega_1$, $\mathrm{cf}(\theta) > \omega$ を満たす十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明すればよい．定理 4.6 より，

$$\{X, \tau\} \subseteq M_0 \preceq H(\theta) \quad \text{and} \quad |M_0| \leq \omega$$

をみたす集合 M_0 が存在する．以下，補題 6.2 の証明と同様にして，次をみたす長さ ω_1 の集合列 $\{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と集合 M を構成する．

$$\forall \alpha < \omega_1 \, (M_\alpha \preceq H(\theta),\ M_\alpha \cup \{M_\alpha\} \subseteq M_{\alpha+1} \text{ and } |M_\alpha| \leq \omega), \tag{6.2}$$

$$\forall \alpha < \omega_1 \, (\text{if } \alpha \text{ is a limit, then } M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta), \tag{6.3}$$

$$M = \bigcup_{\alpha < \omega_1} M_\alpha,\ M \preceq H(\theta) \text{ and } |M| = \omega_1. \tag{6.4}$$

主張 **1**. $w(X) > \omega$.

証明. もし $w(X) \leq \omega$ ならば，X は距離化可能でないから，X は正則でない．したがって，点 $x \in X$ と x の近傍 U で，x の任意の近傍 V に対して，$\mathrm{cl}_X V \not\subseteq U$ となるものが存在する．いま $w(X) \leq \omega$ だから，X の基底 $\mathcal{B}$ と X の稠密集合 D で，$|\mathcal{B}| \leq \omega$, $|D| \leq \omega$ をみたすものが存在する．そこで，$x \in V$ である任意の $V \in \mathcal{B}$ に対して，点 $y_V \in \mathrm{cl}_X V \setminus U$ をとり，$Y = \{x\} \cup \{y_V : x \in V \in \mathcal{B}\} \cup D$ とおく．このとき，$|Y| \leq \omega$ であるが，Y は正則でない．これは仮定に矛盾する． □

主張 1 と定理 6.4 より，$|Z| \leq \omega_1$ かつ $w(Z) > \omega$ をみたす X の部分空間 Z が存在する．すなわち，

$$H(\theta) \vDash \exists Z \, (Z \subseteq X \wedge |Z| \leq \omega_1 \wedge w(Z) > \omega). \tag{6.5}$$

上の $(\cdots)$ 内は自由変数が Z, X, τ, ω, ω_1 である論理式で表現される．いま $\theta > \omega_1$ だから，補題 4.7 (2) より $\omega_1 \in M_0$. (6.5) の "$\models$" より右の部分全体の自由変数は $X, \tau, \omega, \omega_1 \in M_0$ だから，定理 4.2 より，

$$\exists Z_0 \in M_0\,(H(\theta) \models \text{“}Z_0 \subseteq X \wedge |Z_0| \leq \omega_1 \wedge w(Z_0) > \omega\text{”}).$$

$Y = \mathrm{cl}_X Z_0$ とおくと，Y は $Z_0, X, \tau \in M_0$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $Y \in M_0$. $\tau \cap M$ から生成される X の位相を τ_0 で表す．

主張 2. $\tau|_{Y\cap M} = \tau_0|_{Y\cap M}$.

証明. 明らかに，$\tau|_{Y\cap M} \supseteq \tau_0|_{Y\cap M}$. 逆の包含関係を示すために，任意の $x \in Y \cap M$ と，$x \in U$ である任意の $U \in \tau$ をとる．$D = Z_0 \cup \{x\}$ とおくと，仮定より D は距離化可能．したがって，x の D における可算近傍基底が存在する．すなわち，

$$H(\theta) \models \exists \mathcal{B}\,(\mathcal{B} \text{ is a countable relative base for } (x, D, \tau)). \tag{6.6}$$

上の $(\cdots)$ 内は自由変数が $\mathcal{B}$, x, D, τ, ω である論理式で表現される．ここで，D は $Z_0, x \in M$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $D \in M$. したがって，(6.6) の "$\models$" より右の部分全体の自由変数は $x, D, \tau, \omega \in M$ だから，定理 4.2 より，

$$\exists \mathcal{B}_0 \in M\,(H(\theta) \models \text{“}\mathcal{B}_0 \text{ is a countable relative base for } (x, D, \tau)\text{”}). \tag{6.7}$$

$|\mathcal{B}_0| \leq \omega$ だから，定理 4.8 より $\mathcal{B}_0 \subseteq M$. ゆえに，$\mathcal{B}_0 \subseteq \tau \cap M \subseteq \tau_0$. したがって，$x \in B \cap Y \cap M \subseteq U$ をみたす $B \in \mathcal{B}_0$ が存在することを示せばよい．$|D \cup M| = \omega_1$ だから，仮定より $D \cup M$ は距離化可能（ゆえに，正則）．したがって，次をみたす $V \in \tau$ が存在する．

$$x \in V \quad \text{and} \quad \mathrm{cl}_X(V \cap (D \cup M)) \cap (D \cup M) \subseteq U.$$

(6.7) より，$x \in B \cap D \subseteq V$ をみたす $B \in \mathcal{B}_0$ が存在する．このとき，

$$\mathrm{cl}_X(B \cap D) \cap M \subseteq \mathrm{cl}_X(V \cap (D \cup M)) \cap (D \cup M) \subseteq U.$$

D は Y で稠密だから，$\mathrm{cl}_X(B \cap D) = \mathrm{cl}_X(B \cap Y)$. したがって，$B \cap Y \cap M \subseteq \mathrm{cl}_X(B \cap Y) \cap M \subseteq U$. ゆえに，$\tau|_{Y\cap M} \subseteq \tau_0|_{Y\cap M}$. □

$\mu = \{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とおくと，定理 4.6 より

$$\{X, Y, \tau, M, \mu\} \subseteq N \preceq H(\theta) \quad \text{and} \quad |N| = \omega$$

をみたす集合 N が存在する．系 4.9 より，ある極限順序数 $\delta < \omega_1$ に対して $\omega_1 \cap N = \delta$ が成立する．

主張 3. $M \cap N = M_\delta$.

証明．最初に，$M\cap N=\bigcup(\mu\cap N)$ を示す．(6.4) より $H(\theta)\vDash$ “$M=\bigcup\mu$”. $M,\mu\in N$ かつ $N\preceq H(\theta)$ だから，$N\vDash$ “$M=\bigcup\mu$”．すなわち，

$$N\vDash \text{“}(\forall x\in M\,\exists m\in\mu\,(x\in m))\wedge(\forall m\in\mu\,(m\subseteq M))\text{”}. \tag{6.8}$$

相対化の定義より，(6.8) は次を意味する．

$$(\forall x\in M\cap N\,\exists m\in\mu\cap N\,(x\in m))\wedge(\forall m\in\mu\cap N\,(m\cap N\subseteq M)).$$

ゆえに，$M\cap N=\bigcup(\mu\cap N)\cap N$. 任意の $m\in\mu\cap N$ に対し，$m\in N$ かつ $|m|\leq\omega$ だから，定理 4.8 より $m\subseteq N$. ゆえに，$\bigcup(\mu\cap N)\subseteq N$ だから，

$$M\cap N=\bigcup(\mu\cap N). \tag{6.9}$$

次に，$\mu\cap N=\{M_\alpha:\alpha<\delta\}$ を示す．ω_1 を添え字の集合とする集合 μ は，写像として $\mu=\{\langle\alpha,M_\alpha\rangle:\alpha<\omega_1\}$ と表される．もし $\langle\alpha,M_\alpha\rangle\in\mu\cap N$ ならば，$\langle\alpha,M_\alpha\rangle=\{\{\alpha\},\{\alpha,M_\alpha\}\}\in N$. 定理 4.8 より，これは $\alpha\in N$ を導く．$\omega_1\cap N=\delta$ だから，$\alpha<\delta$. 逆に，任意の $\alpha<\delta$ に対し，$\mu(\alpha)$ は，$\mu,\alpha\in N$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $M_\alpha=\mu(\alpha)\in N$. ゆえに，$M_\alpha\in\mu\cap N$. 結果として，

$$\mu\cap N=\{M_\alpha:\alpha<\delta\}. \tag{6.10}$$

系 4.9 より，δ は極限順序数．したがって，(6.3), (6.9), (6.10) より，$M\cap N=\bigcup_{\alpha<\delta}M_\alpha=M_\delta$. □

主張 4. $\tau_0\cap N$ が $(x_0,Y\cap M,\tau_0)$ に対する相対基底でないような点 $x_0\in\mathrm{cl}_X(Y\cap M\cap N)\cap M$ が存在する．

証明．$w(Y)\geq w(Z_0)>\omega$ かつ $|M_\delta|\leq\omega$ だから，$\tau\cap M_\delta$ は $Y=(Y,\tau|_Y)$ に対する相対基底でない．したがって，

$$Y_1=\{y\in Y:\tau\cap M_\delta\text{ is a relative base for }(y,Y,\tau)\}$$

とおくと，$Y_1\neq Y$. 点 $z_0\in Y\setminus Y_1$ をとる．このとき，もし $\mathrm{cl}_X(Y\cap M_\delta)\subseteq Y_1$ ならば，$z_0\in Y\setminus\mathrm{cl}_X(Y\cap M_\delta)$ だから，$\mathcal{U}\subseteq\tau\cap M_\delta$ で

$$\mathrm{cl}_X(Y\cap M_\delta)\subseteq\bigcup\mathcal{U}\quad\text{and}\quad z_0\notin\bigcup\mathcal{U}.$$

をみたすものが存在する．$|\mathcal{U}|\leq|M_\delta|\leq\omega$ かつ X は可算コンパクトだから，$\mathrm{cl}_X(Y\cap M_\delta)$ の有限被覆 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ が存在する．このとき，

$$Y\cap M_\delta\subseteq\bigcup\mathcal{V}\quad\text{and}\quad Y\not\subseteq\bigcup\mathcal{V}. \tag{6.11}$$

相対化の定義より，(6.11) は次を意味する．

$$M_\delta\vDash\text{“}Y\subseteq\bigcup\mathcal{V}\text{”}\quad\text{and}\quad H(\theta)\nvDash\text{“}Y\subseteq\bigcup\mathcal{V}\text{”}. \tag{6.12}$$

いま $Y \in M_0$ だから，$Y \in M_\delta$. また $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \subseteq M_\delta$ かつ $|\mathcal{V}| < \omega$ だから，補題 4.7 (3) より，$\mathcal{V} \in M_\delta$. ゆえに，(6.12) は $M_\delta \preceq H(\theta)$ であることに矛盾する．結果として，$\mathrm{cl}_X(Y \cap M_\delta) \not\subseteq Y_1$. すなわち，

$$H(\theta) \vDash \exists x\, (\underbrace{x \in \mathrm{cl}_X(Y \cap M_\delta)}_{\varphi_1(x,\tau,Y,M_\delta)} \wedge \underbrace{\tau \cap M_\delta \text{ is not a relative base for } (x, Y, \tau)}_{\varphi_2(x,\tau,Y,M_\delta)}).$$

いま $\tau, Y, M_\delta \in M$ だから，定理 4.2 より

$$\exists x_0 \in M\, (H(\theta) \vDash \text{“}\varphi_1(x_0, \tau, Y, M_\delta) \wedge \varphi_2(x_0, \tau, Y, M_\delta)\text{”}).$$

このとき，$x_0 \in \mathrm{cl}_X(Y \cap M_\delta) \cap M$. ゆえに，主張 3 より

$$x_0 \in \mathrm{cl}_X(Y \cap M \cap N) \cap M.$$

他方，$x_0, \tau, Y, M_\delta \in M$ だから，$M \vDash \varphi_2(x_0, \tau, Y, M_\delta)$. すなわち，

$$M \vDash \text{“}\exists U \in \tau\, (x_0 \in U \wedge \forall V \in \tau \cap M_\delta\, (x_0 \in V \to V \cap Y \not\subseteq U))\text{”}. \quad (6.13)$$

相対化の定義より，(6.13) は次を意味する．

$$\exists U \in \tau \cap M\, (x_0 \in U \wedge \forall V \in \tau \cap M_\delta\, (x_0 \in V \to V \cap Y \cap M \not\subseteq U))\text{”}.$$

ゆえに，$\tau \cap M_\delta$ は $(x_0, Y \cap M, \tau_0)$ に対する相対基底でない．主張 3 より，$\tau \cap M \cap N$ は $(x_0, Y \cap M, \tau_0)$ に対する相対基底でない．さらに，$\tau \cap M$ は τ_0 の基底だから，結果として $\tau_0 \cap N$ は $(x_0, Y \cap M, \tau_0)$ に対する相対基底でない． □

最後に，$|M| = \omega_1$ だから，仮定より $(Y \cap M, \tau|_{Y \cap M})$ は距離化可能．主張 2 より $(Y \cap M, \tau_0|_{Y \cap M})$ も距離化可能．したがって，$(Y \cap M, \tau_0|_{Y \cap M})$ に対する相対基底 $\mathcal{B} \subseteq \tau_0$ で，$\mathcal{B}$ が $Y \cap M$ の各点で点可算であるものが存在する．すなわち，

$$\psi(\mathcal{B}, \tau_0, Y \cap M, \omega) = \text{“}\mathcal{B} \text{ is a relative base for } (Y \cap M, \tau_0|_{Y \cap M})$$
$$\text{and } \mathcal{B} \text{ is point-countable at each } y \in Y \cap M\text{”}$$

とおくと，$H(\theta) \vDash \exists \mathcal{B}\, (\psi(\mathcal{B}, \tau_0, Y \cap M, \omega))$. τ_0 は $\tau, M \in N$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $\tau_0 \in N$. $Y \cap M$ は $Y, M \in N$ によって一意的に定義される集合だから，系 4.3 より $Y \cap M \in N$. また，補題 4.7 (2) より，$\omega \in N$. したがって，定理 4.2 より，

$$\exists \mathcal{B}_0 \in N\, (H(\theta) \vDash \psi(\mathcal{B}_0, \tau_0, Y \cap M, \omega)).$$

$\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B}_0 : B \cap (Y \cap M \cap N) \neq \emptyset\}$ とおく．$\mathcal{B}_0$ は $Y \cap M$ の各点で点可算かつ $|N| = \omega$ だから，$|\mathcal{B}_1| \leq \omega$. このとき，定理 5.7 の証明中の主張 1 と同様に，$\mathcal{B}_1 \subseteq N$ であることが証明できる．ゆえに，$\mathcal{B}_1 \subseteq \tau_0 \cap N$. これは，任意の点 $x \in \mathrm{cl}_X(Y \cap M \cap N) \cap M$ に対して，$\tau_0 \cap N$ が $(x, Y \cap M, \tau_0)$ に対する相対基底であることを意味する．これは，主張 4 で証明した事実に矛盾する． □

注意 **6.7.** 定理 6.6 から X の可算コンパクト性を外すことは出来ない．順序数の空間 ω_2+1 の部分空間 $X=\{\alpha<\omega_2 : \alpha \text{ is a successor}\}\cup\{\omega_2\}$ を考えよ．このとき，X は距離化可能でないが，X の濃度 $\le\omega_1$ の任意の部分空間は離散である．定理 6.6 は，コンパクト性を仮定して [9] で証明された．

7 Balogh's Dowker space I

本節の前半は，Z. T. Balogh [2] の Lemma 1.2 とその証明のコピーである．その中で elementary submodel が使われている箇所に，註として説明を加える．彼はこの補題を用いて濃度 $\mathfrak{c}=2^\omega$ の Dowker 空間を構成した．本節の後半でその構成を述べるが，Lemma 1.2 を認めると，空間の作り方自体は難しくない．

7.1 Lemma 1.2 とその証明

Lemma 1.2. *Let $\lambda=2^{\mathfrak{c}}$, and let $\langle c_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ be a one-to-one enumeration of ${}^{\mathfrak{c}}2=\{c : c \text{ is a function from } \mathfrak{c} \text{ to } 2\}$. Then there is a sequence $\langle d_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ of functions $d_\xi:\mathfrak{c}\to 2$ in such a way that for every $g:\mathfrak{c}\to[\lambda]^{<\omega}$, $f:\mathfrak{c}\to\omega$ and $h:\mathfrak{c}\to[\mathfrak{c}]^{<\omega}$, there are $\alpha<\beta$ in $\mathfrak{c}$ such that $f(\alpha)=f(\beta)$, $\beta\notin h(\alpha)$ and for every $\xi\in g(\alpha)$, $c_\xi(\alpha)=d_\xi(\beta)$.*

Proof of Lemma 1.2. Let us call a triple $\langle A,B,u\rangle$ a *control triple* if

(1) $A\in[\mathfrak{c}]^\omega$, $B\in[{}^A2]^{\le\omega}$;

(2) u is a function with $\mathrm{dom}(u)\in[A]^\omega$;

(3) for every $\alpha\in\mathrm{dom}(u)$, $u(\alpha)\in[{}^A2\setminus B]^{<\omega}$;

(4) if $\alpha\ne\alpha'$ in $\mathrm{dom}(u)$, then $u(\alpha)\cap u(\alpha')=\emptyset$.

Let $\langle A_\beta,B_\beta,u_\beta\rangle_{\beta<\mathfrak{c}}$ be a list of all control triples mentioning each triple $\mathfrak{c}$ many times.

Suppose now that $\xi<\lambda$ and we want to define $d_\xi(\beta)$ for some $\beta<\mathfrak{c}$. We are going to distinguish among three cases.

Case 1. If $c_\xi\restriction A_\beta\in B_\beta$, then let $d_\xi(\beta)=c_\xi(\beta)$.

Case 2. If $c_\xi\restriction A_\beta\in u_\beta(\alpha)$ for some $\alpha\in\mathrm{dom}(u_\beta)$, then note first that $c_\xi|A_\beta\notin B_\beta$ by (3), and that there is only one such α by (4). Then define $d_\xi(\beta)=c_\xi(\alpha)$.

Case 3. If neither Case 1 nor Case 2 holds, then set $d_\xi(\beta)=0$.

The lest of the proof of Lemma 1.2 will be devoted to showing that the sequence $\langle d_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ of functions constructed above satisfies the requirements in the conclusion of Lemma 1.2. To see this, take a $g : \mathfrak{c} \to [\lambda]^{<\omega}$, an $f : \mathfrak{c} \to \omega$ and an $h : \mathfrak{c} \to [\mathfrak{c}]^{<\omega}$. For every $\alpha \in \mathfrak{c}$, let $e_\alpha \in Fn(\lambda, 2)$ be such that $\mathrm{dom}(e_\alpha) = g(\alpha)$ and that $e_\alpha(\xi) = c_\xi(\alpha)$ for every $\xi \in g(\alpha)$.

We will produce a pair $\alpha < \beta$ in $\mathfrak{c}$ such that

(5) $f(\alpha) = f(\beta)$, $\beta \notin h(\alpha)$ and for every $\xi \in g(\alpha)$, $c_\xi(\alpha) = d_\xi(\beta)$.

To do this, fix two countable elementary submodels M and N of $H((2^{2^{\mathfrak{c}}})^+)$ **註 1**
such that $\langle c_\xi \rangle_{\xi<\lambda}, \langle d_\xi \rangle_{\xi<\lambda}, \langle e_\alpha \rangle_{\alpha<\mathfrak{c}}, g, f, h \in M$ and $M \in N$. **註 2**

Let $A = \mathfrak{c} \cap N$, $B = \{c_\xi \restriction A : \xi \in \lambda \cap M\}$ and let us pick a partial function $u : A \to [{}^A 2 \setminus B]^{<\omega}$ with the following property:

(6) whenever $v \in N$ is an infinite partial function $v : \mathfrak{c} \to [\lambda \setminus M]^{<\omega}$ and $\alpha \neq \alpha'$ in $\mathrm{dom}(v)$ implies $v(\alpha) \cap v(\alpha') = \emptyset$, then there is an $\alpha \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$ such that

$$u(\alpha) = \{c_\xi \restriction A : \xi \in v(\alpha)\}$$

To see that there is such a u, let $\langle v_j \rangle_{j\in\omega}$ list each v as in (6). Take $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots \in A$ in such a way that $\alpha_j \in \mathrm{dom}(v_j) \cap N$ and $i < j$ **註 3**
implies $v_i(\alpha_i) \cap v_j(\alpha_j) = \emptyset$. Then let $\mathrm{dom}(u) = \{\alpha_j : j \in \omega\}$, and set $u(\alpha_j) = \{c_\xi \restriction A : \xi \in v_j(\alpha_j)\}$ for every $j \in \omega$. We have to show that u satisfies (2), (3) and (4). It obviously satisfies (2). To see that (3) is satisfied, suppose indirectly that $u(\alpha_j) \cap B \neq \emptyset$ for some $j \in \omega$, i.e. there are $\xi \in v_j(\alpha_j) \subset N$ and $\eta \in \lambda \cap M \subset N$ such that $c_\xi \restriction A = c_\eta \restriction A$. Then $N \models c_\xi = c_\eta$, so $c_\xi = c_\eta$. Since $\langle c_\xi \rangle_{\xi<\lambda}$ is a one-to-one enumeration, it **註 4**
follows that $\xi = \eta$, contradicting $v_j(\alpha_j) \subset \lambda \setminus M$. The proof that u satisfies **註 5**
(4) is similar.

Returning to finding α and β as required in (5), let us pick $\beta < \mathfrak{c}$ to be such that $\beta > \sup A$ and $\langle A_\beta, B_\beta, u_\beta \rangle = \langle A, B, u \rangle$. To find α, let $E = g(\beta) \cap M$ and $e = e_\beta \restriction E = e_\beta \restriction (\lambda \cap M)$. Set $n = f(\beta)$. Let us say that $\langle e_\gamma \rangle_{\gamma \in D}$ ($D \subset \mathfrak{c}$) forms a Δ-system with root e iff e_γ extends e for every $\gamma \in D$, and $\mathrm{dom}(e_\gamma) \cap \mathrm{dom}(e_\delta) = E$ for every $\gamma \neq \delta$ in D. Let us take a maximal $D \subset f^{\leftarrow}(\{n\})$ such that $\langle e_\gamma \rangle_{\gamma\in D}$ forms a Δ-system with root e. Since **註 6**
$\langle e_\gamma \rangle_{\gamma \in \mathfrak{c}}, f, e \in M$, we can assume that we have taken such a $D \in M$. Then **註 7**
D is uncountable, or else adding β to D would contradict maximality. Thus **註 8**
the set

$$H = \{\gamma \in D : (\mathrm{dom}(e_\gamma) \setminus E) \cap (\lambda \cap M) = \emptyset\} \in N$$

is uncountable. Let $v : H \to [\lambda \setminus M]^{<\omega}$ be defined by **註 9, 10**

$$v(\gamma) = \mathrm{dom}(e_\gamma) \setminus E.$$

Then $v \in N$, and thus there is an $\alpha \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$ such that **註 11**

$$u(\alpha) = \{c_\xi \restriction A : \xi \in v(\alpha)\}.$$

This α will satisfy (5) with our β. Indeed, $\alpha \in D \subset f^{\leftarrow}(\{n\})$, so $f(\alpha) = n = f(\beta)$. Since $\alpha, h \in N$, it follows that $h(\alpha) \subset N$. By $\beta > \sup A = \sup(\mathfrak{c} \cap N)$, we conclude $\beta \notin h(\alpha)$. Finally, let $\xi \in g(\alpha) = \mathrm{dom}(e_\alpha)$. We will distinguish between two cases. **註 12**

Case A. If $\xi \in E$, then $c_\xi(\alpha) = e_\alpha(\xi) = e(\xi) = e_\beta(\xi) = c_\xi(\beta)$ and by $\xi \in E \subset \lambda \cap M$ we have $c_\xi \restriction A_\beta = c_\xi \restriction A \in B = B_\beta$. Thus by Case 1 of the definition of $d_\xi(\beta)$, $d_\xi(\beta) = c_\xi(\beta) = c_\xi(\alpha)$.

Case B. If $\xi \in \mathrm{dom}(e_\alpha) \setminus E = v(\alpha)$, then $c_\xi \restriction A_\beta = c_\xi \restriction A \in u(\alpha) = u_\beta(\alpha)$. Thus by Case 2 of the definition of $d_\xi(\beta)$, it follows that $d_\xi(\beta) = c_\xi(\alpha)$.

The rest of the proof of Theorem 1.1 is similar to the proof of Lemma 1 in [W$_1$] of M. E. Rudin and S. Watson. $\square$

註 **1**. $H((2^{2^{\mathfrak{c}}})^+)$ について：濃度 $(2^{2^{\mathfrak{c}}})^+$ は目的のための最小濃度であるが，必ずしも $H((2^{2^{\mathfrak{c}}})^+)$ でなくても，十分大きな θ 対する $H(\theta)$ を選んでもよい．以下，$H((2^{2^{\mathfrak{c}}})^+)$ の代わりに $H(\theta)$ と書く．
註 **2**. 3 つの注意：(i) M, N の存在は定理 4.6 による．(ii) M は可算だから，定理 4.8 から $M \subseteq N$．すなわち，$M \subseteq N \subseteq H(\theta)$. (iii) $\langle c_\xi \rangle_{\xi<\lambda} \in M$ から $\lambda \in M$ が導かれる．なぜなら，族 $\langle c_\xi \rangle_{\xi<\lambda}$ を写像 $c : \lambda \to {}^{\mathfrak{c}}2 ; \xi \mapsto c_\xi$ とみなすと，いま $c \in M$．このとき，$\lambda = \mathrm{dom}(c)$ は M の元 c によって $H(\theta)$ で一意的に定義されるから，$\lambda \in M$．詳しく言えば，任意の $x \in H(\theta)$ に対し，

$$“x \in \mathrm{dom}(c)” \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \underbrace{\exists y\, (\langle x, y \rangle \in c)}_{\psi(x,c)\text{ と考える．}}$$

が成り立つ．ゆえに，補題 4.4 より $\lambda = \mathrm{dom}(c) \in M$．
註 **3**. α_j $(j < \omega)$ の選び方：$v_0 \neq \emptyset$ だから，$H(\theta) \vDash \exists x, y\, (\langle x, y \rangle \in v_0)$. $v_0 \in N$ だから，定理 4.2 より，$\exists x, y \in N\, (H(\theta) \vDash (x, y) \in v_0)$．このような x を選ぶと，$x \in \mathrm{dom}(v_0) \cap N$ だから，$x = \alpha_0$ とおけばよい．次に $\{v_1(\alpha) : \alpha \in \mathrm{dom}(v_1)\}$ は互いに交わらない集合からなる無限集合（ただし，有限個の $\alpha \in \mathrm{dom}(v_1)$ を除いて $v_1(\alpha) = \emptyset$ である可能性も含む）で，$v_0(\alpha_0)$ は有限集合だから，

$$H(\theta) \vDash \exists x, y\, \underbrace{(\langle x, y \rangle \in v_1 \wedge v_1(x) \cap v_0(\alpha_0) = \emptyset \wedge x \neq \alpha_0)}_{\varphi(x,y,\alpha_0,v_0,v_1)\text{ とおく．}}. \tag{7.1}$$

ここで，$\alpha_0, v_0, v_1 \in N$ だから，定理 4.2 より，

$$\exists x, y \in N\, (H(\theta) \vDash \varphi(x, y, \alpha_0, v_0, v_1)).$$

このような x を選ぶと，$x \in \mathrm{dom}(v_1) \cap N$ かつ $v_1(x) \cap v_0(\alpha_0) = \emptyset$ かつ $x \neq \alpha_0$. そこで，$x = \alpha_1$ とおけばよい．この操作を繰り返して，α_j $(j \geq 2)$ を選ぶ．

註 4. $c_\xi = c_\eta$ である理由：いま，$\xi \in v_j(\alpha_j) \subseteq N$ だから，$\xi \in N$. また $c_\xi \restriction A = c_\eta \restriction A$ だから，

$$\forall\, \alpha \in \mathfrak{c} \cap N\, (c_\xi(\alpha) = c_\eta(\alpha)).$$

相対化の定義より，これは $N \vDash \forall \alpha \in \mathfrak{c}\, (c_\xi(\alpha) = c_\eta(\alpha))$ を意味する．すなわち，$N \vDash c_\xi = c_\eta$. ここで，$\xi, \eta \in N$ かつ $\langle c_\xi \rangle_{\xi < \lambda} \in N$ だから $c_\xi, c_\eta \in N$. ゆえに，$N \preceq H(\theta)$ であることから，$H(\theta) \vDash c_\xi = c_\eta$. $H(\theta) = \mathbf{V}$ と考えてよいから，$c_\xi = c_\eta$.

註 5. u が (4) を満たすことの証明：もし (4) を満たさないと仮定すると，ある $i < j$ に対して $u(\alpha_i) \cap u(\alpha_j) \neq \emptyset$. すなわち，$c_\xi \restriction A = c_\eta \restriction A$ を満たす $\xi \in v_i(\alpha_i)$, $\eta \in v_j(\alpha_j)$ が存在する．このとき，上の註 4 と同様に，$c_\xi = c_\eta$ が導かれる．$\langle c_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$ は one-to-one enumeration だから $\xi = \eta$. これは $v_i(\alpha_i) \cap v_j(\alpha_j) = \emptyset$ であることに矛盾する．

註 6. $\Phi = \{D \subseteq f^{\leftarrow}(\{n\}) : \langle e_\gamma \rangle_{\gamma \in D}$ forms a Δ-system with root $e\}$ とおくと，$\{\beta\} \in \Phi$ だから $\Phi \neq \emptyset$. Zorn の補題を使って Φ の極大元 D を選ぶ．

註 7. $D \in M$ と仮定してよい理由：註 6 で定めた記号 Φ を使うと，

$$H(\theta) \vDash \exists D\, (\underbrace{D \text{ is a maximal element of } \Phi}_{\varphi(D,\varepsilon,f,n,E,e)}),$$

ただし，$\varepsilon = \langle e_\gamma \rangle_{\gamma \in \mathfrak{c}} \in M$. M の選び方より $f \in M$. 補題 4.7 より $n \in M$ かつ $2 \in M$. また E は M の有限部分集合だから，補題 4.7 より $E \in M$. したがって，$E \times 2 \in M$（なぜなら，$E \times 2$ は M の元 $E, 2$ によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから）．定理 4.8 より $E \times 2 \subseteq M$. すなわち，$e \subseteq E \times 2 \subseteq M$ だから，再び補題 4.7 より $e \in M$. したがって，定理 4.2 より，$\exists\, D \in M\, (H(\theta) \vDash$ “D is a maximal element of Φ”). ゆえに，$D \in M$ であると仮定できる．

註 8. D が非可算である理由：もし D が可算であると仮定する．このとき，定理 4.8 より $D \subseteq M$. ゆえに $\beta \notin D$. 一方，各 $\gamma \in D$ に対し，e_γ は M の元 $\varepsilon = \langle e_\gamma \rangle_{\gamma \in \mathfrak{c}}$ と γ によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから $e_\gamma \in M$. さらに，$\mathrm{dom}(e_\gamma)$ は M の元 e_γ によって $H(\theta)$ で一意的に定義される集合だから $\mathrm{dom}(e_\gamma) \in M$. 各 $\mathrm{dom}(e_\gamma)$ は有限集合だから，定理 4.8 より $\mathrm{dom}(e_\gamma) \subseteq M$. ゆえに，註 6 で定めた記号 Φ を使うと $D \cup \{\beta\} \in \Phi$. これは D の極大性に矛盾する．

註 9. $H \in N$ である理由：H の定義から，任意の $\gamma \in H(\theta)$ に対して，

$$\gamma \in H \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \underbrace{\gamma \in D \wedge (g(\gamma) \setminus E) \cap (\lambda \cap M) = \emptyset}_{\psi(\gamma,D,g,E,\lambda,M)}$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{dom}(e_\gamma) = g(\gamma)$ であることに注意．いま $D \in M \subseteq N$. 註 7 で述べたように $E \in M \subseteq N$. 註 2 で述べたように $\lambda \in M \subseteq N$. さらに $M \in N$ だから，系 4.4 より $H \in N$.

註 **10**. H が非可算である理由：$\{\mathrm{dom}(e_\gamma) \setminus E : \gamma \in D\}$ の元は互いに交わらない．$\lambda \cap M$ は可算だから，H は非可算である．

註 **11**. $v \in N$ である理由：任意の $x \in H(\theta)$ に対し，

$$x \in v \Leftrightarrow H(\theta) \vDash \underbrace{\exists \gamma \in H\,(x = \langle \gamma, g(\gamma) \setminus E \rangle)}_{\psi(x,g,E,H)}$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{dom}(e_\gamma) = g(\gamma)$ であることに注意．註 7, 9 で調べたように $E, H \in N$. ゆえに，系 4.4 より $v \in N$.

註 **12**. $h(\alpha) \subseteq N$ である理由：$\alpha \in \mathrm{dom}(u) \subseteq A = \mathfrak{c} \cap N \subseteq N$ かつ $h \in M \subseteq N$. $h(\alpha)$ は N の元 α, h によって $H(\theta)$ で一意的に定義されるから，$h(\alpha) \in N$. $h(\alpha)$ は有限集合だから，定理 4.8 より $h(\alpha) \subseteq N$.

7.2 構成

Balogh [2] の Dowker 空間は，集合 $X = \mathfrak{c} \times \omega$ に以下のように位相 τ_B を定義して作られる．各 $\alpha \in \mathfrak{c}$, $s \in [\lambda]^{<\omega}$, $a \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ に対し，

$$F(\alpha, s, a) = \{\beta \in \mathfrak{c} : \forall \xi \in s\,(d_\xi(\beta) = c_\xi(\alpha))\} \setminus a$$

とおき，各点 $x = \langle \alpha, n \rangle \in X$ に対し，

$$\mathfrak{N}_x = \begin{cases} \{\{x\}\}, \text{ if } n = 0, \\ \{\{x\} \cup (F(\alpha, s, a) \times \{n-1\}) : s \in [\lambda]^{<\omega}, a \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}\}, \text{ if } n \geq 1. \end{cases}$$

とおく．このとき τ_B は次のように定義される．任意の $U \subseteq X$ に対して，

$$U \in \tau_B \iff (\forall x \in U)(\exists N \in \mathfrak{N}_x)(N \subseteq U).$$

各 $x \in X$ に対して $\mathfrak{N}_x$ は有限共通部分に関して閉じていて，$\bigcap \mathfrak{N}_x = \{x\}$ が成立するから，τ_B は T_1 位相である．各 $n < \omega$ に対して，$X_n = \mathfrak{c} \times \{n\}$, $G_n = \mathfrak{c} \times (n+1)$ とおく．各 X_n は X の離散部分空間で，G_n は X の開集合である．最初に，$X = (X, \tau_B)$ が継承的正規空間であることを示す．

主張 **1**. 各 $n < \omega$ について，X_n の交わらない部分集合 A_0, A_1 は X の交わらない開集合で分離される．

証明. $n < \omega$ に関する帰納法で証明する．X_0 は X の孤立点からなる集合だから，$n = 0$ のときは成立する．いま $n \geq 1$ として，$n - 1$ のとき主張が成

立すると仮定する．互いに交わらない部分集合 A_0, $A_1 \subseteq X_n$ をとると，次をみたすような $c_\xi \in {}^{\omega}2$ が存在する．

$$c_\xi(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{if } \langle \alpha, n \rangle \in A_0, \\ 1, & \text{if } \langle \alpha, n \rangle \in A_1. \end{cases}$$

各 $i < 2$ に対して $B_i = \{\langle \beta, n-1 \rangle : d_\xi(\beta) = i\}$ とおき，各 $x = \langle \alpha, n \rangle \in X_n$ に対して $N_x = \{x\} \cup (F(\alpha, \{\xi\}, \emptyset) \times \{n-1\})$ とおく．このとき，もし $x \in A_i$ ならば $N_x \subseteq A_i \cup B_i$ が成り立つ．帰納法の仮定より，$B_i \subseteq U_i \subseteq G_{n-1}$ $(i < 2)$ を満たすような X の交わらない開集合 U_0, U_1 が存在する．各 $i < 2$ に対し，$V_i = A_i \cup U_i$ とおくと，V_0, V_1 は X の交わらない開集合で，A_0, A_1 を分離する． □

X の継承的正規性を示すために，$\mathrm{cl}_X H \cap K = H \cap \mathrm{cl}_X K = \emptyset$ を満たす X の部分集合 H, K をとる．それらが X の交わらない開集合で分離されることを示せばよい．標準的な “shoestring argument” により，ある $n < \omega$ に対して $H \subseteq X_n$ であると仮定してよい．

> **Shoestring argument**: 各 n に対して，$H_n = H \cap X_n$, $K_n = K \cap X_n$ とおく．すべての n について，H_n と K, K_n と H が X の交わらない開集合で分離されるならば，H と K もまた X の交わらない開集合で分離される．実際，すべての n に対して，$H_n \subseteq U_n$, $\mathrm{cl}\, U_n \cap K = \emptyset$, $K_n \subseteq V_n$, $\mathrm{cl}\, V_n \cap H = \emptyset$ を満たす X の開集合 U_n, V_n が存在したとする．このとき，$U = \bigcup_{n\in\omega}(U_n \setminus \bigcup_{i\le n} \mathrm{cl}\, V_i)$, $V = \bigcup_{n\in\omega}(V_n \setminus \bigcup_{i\le n} \mathrm{cl}\, U_i)$ とおくと，U, V は X の交わらない開集合で H, K を分離する．

さらに，K の代わりに $K \cup (X_n \setminus H)$ を考えることにより，

$$(K \cap X_n) \cup H = X_n \tag{7.2}$$

であると仮定してよい．

主張 2. 任意の $m \le n$ に対して，H と $K \cap X_m$ は X の交わらない開集合で分離される．

証明. $m = n$ の場合はすでに主張 1 で証明した．$m < n$ の場合を示そう．主張 1 より，X の交わらない開集合 U, V で

$$X_m \setminus \mathrm{cl}_X K \subseteq U \quad \text{and} \quad X_m \cap \mathrm{cl}_X K \subseteq V$$

を満たすものが存在する．いま，$U, V \subseteq G_m$ であると仮定してよい．このとき，$U^* = (X \setminus (G_m \cup \mathrm{cl}_X K)) \cup U$, $V^* = V$ とおくと，U^*, V^* は X の交わらない開集合で，$H \subseteq U^*$, $K \cap X_m \subseteq V^*$ を満たす． □

註．主張 2 の証明で，U^* が X の開集合であることを確かめよう．任意の $x = \langle \alpha, k \rangle \in U^*$ をとる．(i) $k \geq m+1$ のときは，$x \notin \mathrm{cl}\, K$ だから，$N \cap \mathrm{cl}\, K = \emptyset$ を満たす $N \in \mathfrak{N}_x$ が存在する．もし $k > m+1$ ならば，$N \subseteq X \setminus (G_m \cup \mathrm{cl}\, K) \subseteq U^*$. もし $k = m+1$ ならば，$N \setminus \{x\} \subseteq X_m \setminus \mathrm{cl}\, K \subseteq U$ だから $N \subseteq U^*$. (ii) $k \leq m$ のときは，$x \in U$ だから，$N \subseteq U \subseteq U^*$ を満たす $N \in \mathfrak{N}_x$ が存在する．

各 $m \leq n$ に対し，主張 2 より X の交わらない開集合 U_m, V_m で，$H \subseteq U_m$, $K \cap X_m \subseteq V_m$ を満たすものが存在する．このとき，$W_H = \bigcap_{m \leq n} U_m$, $W_K = \bigcup_{m \leq n} V_m$ とおくと，W_H, W_K は X の交わらない開集合で，

$$H \subseteq W_H \quad \text{and} \quad K \cap G_n \subseteq W_K$$

を満たす．いま，$W_H, W_K \subseteq G_n$ であると仮定してよい．最後に，$W_H^* = W_H$, $W_K^* = (X \setminus (G_n \cup \mathrm{cl}_X H)) \cup W_K$ とおくと，W_H^*, W_K^* は X の交わらない開集合で，$H \subseteq W_H^*, K \subseteq W_K^*$ を満たす．ゆえに，X は継承的正規空間である．

註．上の証明で，W_K^* が X の開集合であることを確かめよう．任意の $x = \langle \alpha, k \rangle \in W_K^*$ をとる．(i) $k \geq n+1$ のときは，$x \notin \mathrm{cl}\, H$ だから，$N \cap \mathrm{cl}\, H = \emptyset$ を満たす $N \in \mathfrak{N}_x$ が存在する．もし $k > n+1$ ならば，$N \subseteq X \setminus (G_n \cup \mathrm{cl}\, H) \subseteq W_K^*$. もし $k = n+1$ ならば，仮定 (7.2) より $N \setminus \{x\} \subseteq K \cap X_n \subseteq W_K$ だから $N \subseteq W_K^*$. (ii) $k \leq n$ のときは，$x \in W_K$ だから，$N \subseteq W_K \subseteq W_K^*$ を満たす $N \in \mathfrak{N}_x$ が存在する．

次に，X が可算パラコンパクトでないことを示す．各 $\alpha < \mathfrak{c}$ に対して，

$$\mathfrak{F}_\alpha = \{F(\alpha, s, a) : s \in [\lambda]^{<\omega}, a \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}\}$$

とおく．集合 $Y \subseteq \mathfrak{c}$ が σ-分割可能 (σ-decomposable) であるとは，写像 $f : Y \to \omega$ と $F_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha$ $(\alpha \in Y)$ が存在して，任意の $\alpha, \beta \in Y$ に対し，

$$\text{“}\alpha \neq \beta \text{ and } f(\alpha) = f(\beta)\text{”} \Longrightarrow \text{“}\alpha \notin F_\beta \text{ and } \beta \notin F_\alpha\text{”} \tag{7.3}$$

が成り立つことである．

主張 3. $\mathfrak{c}$ は σ-分割可能でない．

証明．Lemma 1.2 そのものである． □

主張 4. 各 $n < \omega$ について $Y_n \subseteq \mathfrak{c}$ が σ-分割可能ならば，$Y = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ も σ-分割可能である．

証明．σ-分割可能集合の部分集合はまた σ-分割可能だから，$m \neq n$ のとき $Y_m \cap Y_n = \emptyset$ であると仮定できる．各 n に対して，Y_n は σ-分割可能だから，

(7.3) に相当する条件を満たす写像 $f_n : Y_n \to \omega$ と $F_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha$ $(\alpha \in Y_n)$ が存在する．任意の全単射 $g : \omega \times \omega \to \omega$ を選んで，写像 $h : Y \to \omega$ を

$$h(\alpha) = g(\langle f_n(\alpha), n\rangle) \ \text{ if } \alpha \in Y_n$$

によって定めると，h と $\{F_\alpha : \alpha \in Y\}$ は Y が σ-分割可能であることを保証する． □

主張 **5**. σ-分割可能でない集合 $Y \subseteq \mathfrak{c}$ と $n < \omega$ が与えられたとする．このとき，集合 $Y_1 = \{\alpha \in Y : \langle \alpha, n+1\rangle \in \mathrm{cl}_X(Y \times \{n\})\}$ は σ-分割可能でない．

証明. $Y_0 = Y \setminus Y_1$ とおく．任意の $\alpha \in Y_0$ に対して，$F_\alpha \cap Y = \emptyset$ を満たす $F_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha$ が存在するから，Y_0 は σ-分割可能である（任意の写像 $f : Y_0 \to \omega$ がそのことを保証する）．したがって，もし Y_1 が σ-分割可能ならば，主張 4 より $Y = Y_0 \cup Y_1$ もまた σ-分割可能になり，仮定に矛盾する．ゆえに，Y_1 は σ-分割可能でない． □

最後に，X が可算パラコンパクトでないことを示そう．もし X が可算パラコンパクトならば，$F_n \subseteq G_n$ $(n < \omega)$ を満たす X の閉被覆 $\{F_n : n < \omega\}$ が存在する．$\mathfrak{c} = \bigcup_{n<\omega}\{\alpha < \mathfrak{c} : \langle \alpha, 0\rangle \in F_n\}$ であることに着目すると，主張 3 と主張 4 より，ある $m < \omega$ に対して，集合

$$Y = \{\alpha < \mathfrak{c} : \langle \alpha, 0\rangle \in F_m\}$$

は σ-分割可能でない．このとき，主張 5 より，

$$\forall n < \omega \, (\mathrm{cl}_X(Y \times \{0\}) \cap X_n \neq \emptyset) \tag{7.4}$$

が成立する．ところが，$\mathrm{cl}_X(Y \times \{0\}) \subseteq \mathrm{cl}_X F_m = F_m \subseteq G_m$ だから，集合 $\mathrm{cl}_X(Y \times \{0\})$ は X_{m+1} と交わらない．これは (7.4) に矛盾する．ゆえに，X は可算パラコンパクトでない．

注意 **7.1.** 定義から分かるように，X の位相は，2 つの列 $\langle c_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ と $\langle d_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ を使って定義される．後者の列は，$\langle c_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ の順序と control triples の列 $\langle A_\beta, B_\beta, u_\beta\rangle_{\beta<\mathfrak{c}}$ の順序に依存するので，X の位相もまたそれらに依存して決まる．どの順序に対しても X は Dowker 空間になるが，筆者は異なる順序から得られた位相が互いに同型であるかどうか知らない．Lemma 1.2 の証明で，列 $\langle d_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ の定義には elementary submodel は使われていない．したがって，X の位相は elementary submodel を使わずに定義されている．

注意 **7.2.** 列 $\langle d_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ がどんな列であっても，集合 $X = \mathfrak{c} \times \omega$ に上記のように位相 τ を定めると (X, τ) は継承的正規空間になる．例えば，$d_\xi = c_\xi$ $(\xi < \lambda)$ や $d_\xi = 0$ $(\xi < \lambda)$ と定めると，X は離散空間である．

8 Balogh's Dowker space II

前節では，特徴関数 $c_\xi \in {}^{\mathfrak{c}}2$ に対して関数 $d_\xi \in {}^{\mathfrak{c}}2$ を定義することによって，集合 $X = \mathfrak{c} \times \omega$ 上に Dowker 位相（$= X$ が Dowker 空間となる位相）τ が構成された．一方，Balogh [3] では，集合 $X = \mathfrak{c} \times \omega$ 上の $2^{\mathfrak{c}}$ 個の binary open cover の候補 $\langle U^0_\xi, U^1_\xi \rangle$ に対して，それらを細分する disjoint open cover $\langle B^0_\xi, B^1_\xi \rangle$ を帰納的に定義する方法によって，他の性質をあわせ持つ Dowker 空間が構成された．森田予想の解決に到るその後の論文 Balogh [4], [5], [6] では，すべて後者の方法が使われている．本節では，後者の方法によって集合 $X = \mathfrak{c} \times \omega$ 上にオプションの性質を持たない Dowker 位相を定める方法を解説した Balogh [7] の証明を紹介する．

8.1 構成

集合 $X = \mathfrak{c} \times \omega$ 上に Dowker 位相 τ を構成する．各 $n < \omega$ に対して，$W_n = \mathfrak{c} \times n$ とおき，

$$\mathcal{B}_0 = \{W_n : n < \omega\} \cup \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{B}_0$ は X 上の T_1 位相を生成する．$X = U^0 \cup U^1$ を満たす集合 U^0, U^1 の対 $S = \langle U^0, U^1 \rangle$ を X の被覆対 (covering pair) とよぶ．$\lambda = 2^{\mathfrak{c}}$ とおくと，集合 X の被覆対全体の濃度は λ である．X のすべての被覆対をどの被覆対も λ 回繰り返して数えるように並べた列を $\mathcal{S} = \langle S_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$ とする．ここで，$S_\xi = \langle U^0_\xi, U^1_\xi \rangle$ $(\xi < \lambda)$ とする．以下で，$\xi < \lambda$ 上の超限帰納法によって，集合 $H \subseteq \lambda$ と，各 $\xi \in H$ に対して，

$$B^0_\xi \subseteq U^0_\xi,\ B^1_\xi \subseteq U^1_\xi,\ B^0_\xi \cap B^1_\xi = \emptyset \ \text{ and } \ B^0_\xi \cup B^1_\xi = X \tag{8.1}$$

をみたす X の部分集合の対 $\langle B^0_\xi, B^1_\xi \rangle$ を定義する．各 $\xi < \lambda$ に対して，

$$\mathcal{B}_\xi = \mathcal{B}_0 \cup \{B^0_\eta, B^1_\eta : \eta \in H, \eta < \xi\} \tag{8.2}$$

とおいて，τ_ξ を $\mathcal{B}_\xi$ から生成される位相とする．このとき，τ_λ が X の求める Dowker 位相 τ である．

被覆対 $S = \langle U^0, U^1 \rangle$ と $A \in [X]^\omega$ に対して，$S \restriction A = \langle U^0 \cap A, U^1 \cap A \rangle$ とおき，$\mathcal{S}_A = \{S \restriction A : S \text{ は被覆対}\}$ とおく．

定義 8.1. $A \in [X]^\omega$, $\mathcal{R} \in [\mathcal{S}_A]^{\leq\omega}$ と $\mathrm{dom}(u) \in [A]^\omega$ である関数 u が次の条件 (C_1), (C_2) を満たすとき，$\langle A, \mathcal{R}, u \rangle$ を control triple とよぶ．

(C_1) $\forall x \in \mathrm{dom}(u)\,(u(x) \in [\mathcal{S}_A \setminus \mathcal{R}]^{<\omega})$,
(C_2) $\forall x, x' \in \mathrm{dom}(u)\,(x \neq x' \to u(x) \cap u(x') = \emptyset)$.

すべての control triple からなる集合の濃度は $\mathfrak{c}$ である．そこで，すべての control triple をどの control triple も $\mathfrak{c}$ 回繰り返して数えるように並べた列を $\langle\langle A_\beta, \mathcal{R}_\beta, u_\beta\rangle\rangle_{\beta<\mathfrak{c}}$ とおく．このとき，さらに $A_\beta \subseteq \beta\times\omega$ $(\beta<\mathfrak{c})$ であると仮定してよい．

いま，$\xi<\lambda$ 上の超限帰納法によって，集合 $H\subseteq\lambda$ と (8.1) をみたす部分集合の対 $\langle B^0_\xi, B^1_\xi\rangle$ $(\xi\in H)$ を定義しよう．$\xi<\lambda$ とする．任意の $\eta<\xi$ に対して，$\eta\in H$ であるか否か，そして $\langle B^0_\eta, B^1_\eta\rangle$ $(\eta\in H, \eta<\xi)$ がすでに定義されたと仮定する．

<u>Case 1</u>. $U^0_\xi, U^1_\xi\in\tau_\xi$ かつ「条件

$$\langle U^0_\eta, U^1_\eta\rangle = \langle U^0_\xi, U^1_\xi\rangle \quad \text{and} \quad U^0_\eta, U^1_\eta\in\tau_\eta \tag{8.3}$$

を満たす $\eta<\xi$ が存在しない」とき：
このとき，$\xi\in H$ と定める．次に，以下のように $\beta<\mathfrak{c}$ 上の帰納法で，各点 $x=\langle\beta,n\rangle\in X$ に対して順序数 $x(\xi)$ $(=\langle\beta,n\rangle(\xi))<2$ を定めて，

$$B^i_\xi = \{x\in X : x(\xi)=i\} \quad \text{for} \quad i<2 \tag{8.4}$$

と定義する．

> 註．超限帰納法が完成した段階では，$x(\xi)$ $(=\langle\beta,n\rangle(\xi))$ は 3 変数の関数 $\mathfrak{c}\times\omega\times H\to 2$ であると考えられる．

いま，$\beta<\mathfrak{c}$ として，任意の $\alpha<\beta$ と任意の $k<\omega$ に対して $\langle\alpha,k\rangle(\xi)$ がすでに定められたと仮定する．$\langle\beta,k\rangle(\xi)$ $(k<\omega)$ を定めよう．

<u>Subcase 1.1</u>. $S_\xi\restriction A_\beta\in\mathcal{R}_\beta$ のとき：
$m=\max\{n\le\omega : \exists i<2\,(\{\beta\}\times n\subseteq U^i_\xi)\}$ とおき，$\{\beta\}\times m\subseteq U^i_\xi$ を満たす $i<2$ を任意に選んで固定する．すべての $k<m$ に対して，$\langle\beta,k\rangle(\xi)=i$ と定める．もし $m<\omega$ ならば，$m\le k<\omega$ である k に対してそれぞれ $\langle\beta,k\rangle\in U^{i(k)}_\xi$ を満たす $i(k)<2$ を任意に選んで，$\langle\beta,k\rangle(\xi)=i(k)$ と定める．

<u>Subcase 1.2</u>. $\exists x\in\mathrm{dom}(u_\beta)\,(S_\xi\restriction A_\beta\in u_\beta(x))$ のとき：
このとき，(C_1) より $S_\xi\restriction A_\beta\notin\mathcal{R}_\beta$ であることに注意しよう．また，(C_2) より $S_\xi\restriction A_\beta\in u_\beta(x)$ を満たす x は一意的に定まる．$x\in\mathrm{dom}(u_\beta)\subseteq A_\beta\subseteq\beta\times\omega$ だから，帰納法の仮定より $x(\xi)$ はすでに定められている．各 $k<\omega$ に対して，次のように定める．

$$\langle\beta,k\rangle(\xi)=\begin{cases} x(\xi), & \text{if } \langle\beta,k\rangle\in U^{x(\xi)}_\xi \\ 1-x(\xi), & \text{if } \langle\beta,k\rangle\notin U^{x(\xi)}_\xi \end{cases}$$

> 註．Subcase 1.1, 1.2 のどちらの場合も，もし $\langle\beta,k\rangle$ が U^i_ξ だけに属すとき（すなわち，$\langle\beta,k\rangle\notin U^{1-i}_\xi$ のとき）は，$\langle\beta,k\rangle(\xi)=i$ である．$\langle\beta,k\rangle(\xi)$ の値が問題になるのは，$\langle\beta,k\rangle\in U^0_\xi\cap U^1_\xi$ の場合であ

る．このとき，Subcase 1.2 では，$x(\xi) = 0$ ならば $\langle \beta, k\rangle(\xi) = 0$, $x(\xi) = 1$ ならば $\langle \beta, k\rangle(\xi) = 1$ と定めている．

<u>Subcase 1.3</u>. Subcase 1.1, 1.2 以外のとき：
各 $k < \omega$ に対して，$\langle \beta, k\rangle \in U_\xi^{i(k)}$ を満たす $i(k) < 2$ をそれぞれ任意に選んで，$\langle \beta, k\rangle(\xi) = i(k)$ と定める．

以上で，すべての点 $x \in X$ に対して順序数 $x(\xi) < 2$ が定められた．そこで，集合 B_ξ^i $(i < 2)$ を (8.4) のように定義する．

<u>Case 2</u>. Case 1 以外のとき（すなわち，$U_\xi^0 \notin \tau_\xi$ または $U_\xi^1 \notin \tau_\xi$ または (8.3) を満たす $\eta < \xi$ が存在するとき）：
このとき，$\xi \notin H$ とし，B_ξ^0, B_ξ^1 を定義しない．

以上によって，集合 $H \subseteq \lambda$ と (8.1) をみたす集合の対 $\langle B_\xi^0, B_\xi^1\rangle$ $(\xi \in H)$ が定義された．最後に，

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathcal{B}_\xi = \mathcal{B}_0 \cup \{B_\xi^0, B_\xi^1 : \xi \in H\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{B}$ によって生成される位相 τ が X の求める位相である．位相 τ の定義より，次の主張が直ちに導かれる．

主張 **1**. $\xi \in H, \beta \in \kappa$ とする．このとき，

(1) 上の Subcase 1.1 の場合，もしある k, j に対して $\{\beta\} \times (k+1) \subseteq U_\xi^j$ ならば，$\{\beta\} \times (k+1) \subseteq B_\xi^{\langle \beta,k\rangle(\xi)}$,

(2) 上の Subcase 1.2 の場合，$(\{\beta\} \times \omega) \cap U_\xi^{x(\xi)} \subseteq B_\xi^{x(\xi)}$.

補題 8.2. 任意の互いに交わらない X の閉集合 F^0, F^1 に対して，$F^i \subseteq B_\xi^i$ $(i < 2)$ を満たす $\xi \in H$ が存在する．

証明. 各 $i < 2$ に対し，$U^i = X \setminus F^{1-i}$ とおくと，$\{U^0, U^1\}$ は X の開被覆．$|X| = \mathfrak{c}$ だから，U^0, U^1 は共に高々 $\mathfrak{c}$ 個の基本開集合の和集合として表される．すなわち，ある $\nu < \lambda$ に対して，$U^0, U^1 \in \tau_\nu$ が成立する．いま，$\nu \le \nu' < \lambda$ ならば，$U^0, U^1 \in \tau_{\nu'}$ であることに注意しよう．一方，$\mathcal{S} = \langle S_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ の並べ方より，$\langle U^0, U^1\rangle = \langle U_\eta^0, U_\eta^1\rangle$ を満たす η は λ の中に非有界に存在する．したがって，次の ξ を定義することが出来る．

$$\xi = \min\{\eta < \lambda : \langle U^0, U^1\rangle = \langle U_\eta^0, U_\eta^1\rangle \ \text{ and } \ U^0, U^1 \in \tau_\eta\}.$$

このとき，上の Case 1 より，$\xi \in H$ で，(8.1) を満たす $\langle B_\xi^0, B_\xi^1\rangle$ が定義される．各 $i < 2$ に対して，$B_\xi^i \subseteq U_\xi^i = X \setminus F^{1-i}$ が成り立ち，$\{B_\xi^0, B_\xi^1\}$ は X の分割だから，$F^i \subseteq B_\xi^i$. □

補題 8.2 より，(X, τ) は正規空間である．

8.2 完全近傍

位相空間 (X,τ) において，点 $x = \langle \alpha, k\rangle \in X$ の基本近傍は次の形である．

$$V_{t,K}(x) = \bigcap_{\xi\in t} B_\xi^{x(\xi)} \cap (W_{k+1}\setminus K),$$

ただし，$t \in [H]^{<\omega}$, $K \in [X]^{<\omega}$ である．基本近傍 $V_{t,K}(x)$ が条件

$$\forall \xi \in t \left(V_{t\cap\xi,K}(x) \subseteq U_\xi^{x(\xi)} \right) \tag{8.5}$$

を満たすとき，$V_{t,K}(x)$ は完全 (complete) であるという．

> 注意．点 $x \in X$ に対して集合 $B_\xi^{x(\xi)}$ が定義されるのは，前節の Case 1, $U_\xi^0, U_\xi^1 \in \tau_\xi$ の場合である．したがって，
>
> $$x \in V_{t',K'}(x) \subseteq U_\xi^{x(\xi)}$$
>
> を満たす τ_ξ-近傍 $V_{t',K'}(x)$ が存在する．ここで，$t' \subseteq H\cap\xi$ である．完全近傍 $V_{t,K}(x)$ とは，近傍を定めるコード t, K の中にこのような t', K' をすべて含んでいる近傍のこと．

補題 8.3. 任意の $x \in X$ の任意の基本近傍 $V_{t,K}(x)$ $(t \in [H]^{<\omega}, K \in [X]^{<\omega})$ に対して，$t \subseteq t^*$, $K \subseteq K^*$ かつ $V_{t^*,K^*}(x)$ が完全近傍であるような $t^* \in [H]^{<\omega}$, $K^* \in [X]^{<\omega}$ が存在する．

証明. 一般に，点 $x \in X$ の基本近傍 $V_{t,K}(x)$ が完全でないとき，

$$\xi_{t,K} = \max\{\xi \in t : V_{t\cap\xi,K}(x) \not\subseteq U_\xi^{x(\xi)}\}$$

とおく．このとき，次の主張が成立する．

主張 **2**. 点 x の基本近傍 $V_{t,K}(x)$ が完全でないならば，$t \subseteq t'$, $K \subseteq K'$ かつ「$V_{t',K'}(x)$ は完全，または $\xi_{t',K'} < \xi_{t,K}$」をみたす $t' \in [H]^{<\omega}$, $K' \in [X]^{<\omega}$ が存在する．

証明. $\eta = \xi_{t,K}$ とおく．このとき，$V_{t\cap\eta,K}(x) \not\subseteq U_\eta^{x(\eta)}$，かつ

$$\forall \xi \in t \left(\xi > \eta \to V_{t\cap\xi,K}(x) \subseteq U_\xi^{x(\xi)} \right). \tag{8.6}$$

いま，$x \in U_\eta^{x(\eta)}$ かつ $U_\eta^{x(\eta)} \in \tau_\eta$ だから，

$$V_{\overline{t},\overline{K}}(x) \subseteq U_\eta^{x(\eta)} \tag{8.7}$$

をみたす $\overline{t} \in [H\cap\eta]^{<\omega}$, $\overline{K} \in [X\setminus\{x\}]^{<\omega}$ が存在する．このとき，$t' = t\cup\overline{t}$, $K' = K\cup\overline{K}$ とおくと，(8.6), (8.7) より，

$$\forall \xi \in t' \left(\xi \geq \eta \to V_{t'\cap\xi,K'}(x) \subseteq U_\xi^{x(\xi)} \right).$$

ゆえに，もし $V_{t',K'}(x)$ が完全でなければ，$\xi_{t',K'} < \xi_{t,K}$ である． □

補題 8.3 の証明を続けよう．もし $t \subseteq t^*$, $K \subseteq K^*$ かつ $V_{t^*,K^*}(x)$ が完全近傍であるような $t^* \in [H]^{<\omega}$, $K^* \in [X]^{<\omega}$ が存在しないとする．このとき，上の主張 2 より，$\xi_{t,K} > \xi_{t_1,K_1} > \xi_{t_2,K_2} > \cdots$ をみたす順序数の列が存在する．これは順序数の下降列が存在しないことに矛盾する． □

8.3 Main Lemma

空間 (X, τ) が可算パラコンパクトでないことを証明しよう．そのために，$\beta < \mathfrak{c}$, $\xi \in H$ に対し，$\{\beta\} \times \omega \subseteq B^i_\xi$ を満たす $i < 2$ が存在するとき，β は ξ-homogeneous であるという．

補題 8.4 (Main Lemma). 任意の $H' \in [H]^{\leq\omega}$ に対して，$\beta < \mathfrak{c}$ が存在して，すべての $\xi \in H'$ に対して β は ξ-homogeneous である．

証明は次節で与える．ここでは，補題 8.4 が次の命題を導くことを示そう．

命題 8.5. (X, τ) は可算パラコンパクトでない．

証明. もし X が可算パラコンパクトであると仮定する．このとき，X の可算開被覆 $\{W_n : n < \omega\}$ に対し，$Z_n \subseteq W_n$ $(n < \omega)$ を満たす X の閉被覆 $\{Z_n : n < \omega\}$ が存在する．補題 8.2 より，関数 $\xi : \omega \to H$ が存在して，

$$Z_n \subseteq B^0_{\xi(n)} \quad \text{and} \quad X \setminus W_n \subseteq B^1_{\xi(n)}$$

が各 $n < \omega$ に対して成り立つ．ところが，$X = \bigcup_{n<\omega} Z_n$ だから，各 $\beta < \mathfrak{c}$ に対して，β が $\xi(n)$-homogeneous でないような $n < \omega$ が存在する．これは補題 8.4 に矛盾する． □

8.4 Main Lemma の証明

I. 任意の $H' = \{\xi_n : n < \omega\} \in [H]^{\leq\omega}$ をとる．補題 8.3 より，次の 3 条件 (T_i) $(i = 0, 1, 2)$ を満たす写像 $t : X \to [H]^{<\omega}$ と $K : X \to [X]^{<\omega}$ を定義することが出来る．

(T_0) $\forall x = \langle \beta, n\rangle \in X\, (\{\xi_j : j \leq n\} \subseteq t(\beta, n))$,

(T_1) $\forall \beta < \mathfrak{c}, \forall m, n < \omega\, (m < n \to t(\beta, m) \subseteq t(\beta, n))$,

(T_2) $\forall x = \langle \beta, n\rangle \in X\, (V_{t(\beta,n),K(\beta,n)}(x)$ は x の完全近傍).

ただし，$t(\alpha, k) = t(\langle \alpha, k\rangle)$, $K(\alpha, k) = K(\langle \alpha, k\rangle)$ である（各 $\beta < \mathfrak{c}$ に対して，補題 8.3 を使って $n < \omega$ 上の帰納法で，$t(\beta, n)$, $K(\beta, n)$ を定義すればよい）．

II. 反映定理 3.8 より，十分大きな θ に対する $H(\theta)$ で証明を進めてよい．定理 4.6 より，$M \preceq H(\theta)$, $N \preceq H(\theta)$ で，

$$\mathfrak{c}, \langle S_\xi \rangle_{\xi<\lambda}, \langle\langle B^0_\xi, B^1_\xi\rangle\rangle_{\xi\in H}, H, t, K, H' = \langle \xi_n \rangle_{n<\omega} \in M \in N$$

かつ $|M| = |N| = \omega$ を満たすものが存在する．定理 4.8 から $M \subseteq N$．いま，

$$A = X \cap N \ \text{ and } \ \mathcal{R} = \{S_\xi \restriction A : \xi \in H \cap M\}$$

とおく．このとき，$A = (\mathfrak{c} \cap N) \times \omega$ であることに注意しよう．

> 註. $X \cap N = (\mathfrak{c} \cap N) \times \omega$ であること：補題 4.7 より，$\omega \subseteq N$．したがって，任意の $\alpha \in \mathfrak{c} \cap N$ と任意の $k < \omega$ に対して，$\langle \alpha, k \rangle$ は N の元によって一意的に定義される集合だから，$\langle \alpha, k \rangle \in N$．逆に，任意の $x = \langle \alpha, k \rangle \in X \cap N$ に対して，α は N の元 x によって一意的に定義されるから，$\alpha \in N$．ゆえに，等式が成立する．

III. X の無限部分集合から $[H \setminus M]^{<\omega}$ への関数 v で，条件

$$\forall x, x' \in \mathrm{dom}(v)\, (x \neq x' \to v(x) \cap v(x') = \emptyset) \tag{8.8}$$

を満たすもの全体の集合を Φ によって表す．

補題 8.6. 次の条件 (1), (2) を満たす関数 u が存在する．

(1) $\langle A, \mathcal{R}, u \rangle$ は control triple,

(2) 任意の $v \in \Phi \cap N$ に対して，無限個の $x \in \mathrm{dom}(v) \cap \mathrm{dom}(u)$ が存在して，それらの x に対し $u(x) = \{S_\xi \restriction A : \xi \in v(x)\}$ が成り立つ．

証明. $\Phi \cap N$ の元全体を，どの元も無限回繰り返して数えるように並べた列を $\Phi \cap N = \langle v_j \rangle_{j<\omega}$ とする．最初に，条件

$$\forall j, j' < \omega\, (j \neq j' \to ((x_j \neq x_{j'}) \wedge (v_j(x_j) \cap v_{j'}(x_{j'}) = \emptyset))) \tag{8.9}$$

満たすように点 $x_j \in \mathrm{dom}(v_j)$ を $j < \omega$ に関する帰納法で選ぼう．$v_0 \neq \emptyset$ だから，$H(\theta) \vDash \exists x, y\, (\langle x, y \rangle \in v_0)$．このとき，$v_0 \in N$ だから，定理 4.2 より

$$\exists x, y \in N\, (H(\theta) \vDash \text{“}\langle x, y \rangle \in v_0\text{”}).$$

このような $x \in N$ を選んで，$x = x_0$ とおく．次に，$k < \omega$ に対して，x_j $(j < k)$ がすでに選ばれたと仮定する．(8.8) より，集合 $\{v_k(x) : x \in \mathrm{dom}(v_k)\}$ の要素は互いに交わらない（ただし，$v_k(x) = \emptyset$ である可能性も含む）．さらに，$\mathrm{dom}(v_k)$ は無限集合で $\bigcup_{j<k} v_j(x_j)$ は有限集合だから，

$$\begin{aligned} H(\theta) \vDash \exists x, y\, (&\langle x, y \rangle \in v_k \text{ and} \\ &(\forall j < k)(x \neq x_j \text{ and } v_k(x) \cap v_j(x_j) = \emptyset)) \end{aligned} \tag{8.10}$$

が成立する．ここで，(8.10) の最も外側の (　) 内の論理式を φ で表すと，$\varphi = \varphi(x, y, x_0, \cdots, x_{k-1}, v_0 \cdots, v_k, k)$ と表されるが，$v_0 \cdots, v_k, x_0, \cdots, x_{k-1} \in N$ かつ $k \in \omega \subseteq N$ だから，定理 4.2 より

$$\exists x, y \in N\, (H(\theta) \vDash \varphi(x, y, x_0, \cdots, x_{k-1}, v_0 \cdots, v_k, k)).$$

このような $x \in N$ を選んで，$x = x_k$ とおく．以上によって，帰納法は完成した．このとき，$\{x_j : j < \omega\} \subseteq X \cap N = A$. 関数 u を，$\mathrm{dom}(u) = \{x_j : j < \omega\}$ として，

$$u(x_j) = \{S_\xi \upharpoonright A : \xi \in v_j(x_j)\} \quad \text{for } j < \omega$$

によって定義する．$\langle A, \mathcal{R}, u\rangle$ が control triple であることを示そう．$A \in [X]^\omega$, $\mathcal{R} \in [\mathcal{S}_A]^\omega$, $\mathrm{dom}(u) \in [A]^\omega$ だから，定義 8.1 の条件 (C_1), (C_2) が満たされることを示せばよい．

(C_1): ある $j < \omega$ に対して $u(x_j) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ ならば矛盾が生じることを示せばよい．このとき，ある $\xi \in v_j(x_j)$ と $\eta \in H \cap M$ が存在して，

$$S_\xi \upharpoonright A = S_\eta \upharpoonright A. \tag{8.11}$$

主張 3. $\xi = \eta$.

証明. はじめに，$S_\xi, S_\eta \in N$ であることを確かめよう．$v_j \in N$ かつ $x_j \in N$ だから，$v_j(x_j) \in N$. $v_j(x_j)$ は有限集合だから，定理 4.8 より $v_j(x_j) \subseteq N$. ゆえに，$\xi \in N$. 他方，$\eta \in M \subseteq N$. したがって，$\langle S_\xi\rangle_{\xi<\lambda} \in N$ かつ $\xi, \eta \in N$ だから，$S_\xi, S_\eta \in N$ が成立する．いま，$A = X \cap N$ だから，等式 (8.11) より，$\forall x \in X \cap N\, (x \in S_\xi \leftrightarrow x \in S_\eta)$. 相対化の定義より，これは

$$N \vDash \forall x \in X\, (x \in S_\xi \leftrightarrow x \in S_\eta)$$

を意味する．$X, S_\xi, S_\eta \in N$ だから，$N \preceq H(\theta)$ であることから，

$$H(\theta) \vDash \forall x \in X\, (x \in S_\xi \leftrightarrow x \in S_\eta)$$

ゆえに，$S_\xi = S_\eta$. 次に，§8.1 の Case 1 を思い出そう．$\xi \in H$ であることから，$U^0_\xi, U^1_\xi \in \tau_\xi$ で，条件「$S_\eta = S_\xi$ かつ $U^0_\eta, U^1_\eta \in \tau_\eta$」を満たす $\eta < \xi$ は存在しない．同様に，$\eta \in H$ であることから，$U^0_\eta, U^1_\eta \in \tau_\eta$ で，条件「$S_\xi = S_\eta$ かつ $U^0_\xi, U^1_\xi \in \tau_\xi$」を満たす $\xi < \eta$ は存在しない．いま $S_\xi = S_\eta$ だから，以上により $\xi = \eta$ でなければならない． □

主張 3 より，$v_j(x_j) \cap M \neq \emptyset$. これは $v_j \in \Phi$ であることに矛盾する．ゆえに，(C_1) は満たされる．

(C_2): ある $i, j < \omega$ に対して $i \neq j$ かつ $u(x_i) \cap u(x_j) \neq \emptyset$ ならば矛盾が生じることを示せばよい．このとき，ある $\xi \in v_i(x_i)$ と $\eta \in v_j(x_j)$ が存在

して，$S_\xi \restriction A = S_\eta \restriction A$. 主張 3 の証明と同じ議論によって，$\xi = \eta$. これは (8.9) に矛盾する．ゆえに，$(\mathrm{C}_2)$ は満たされる．

最後に，条件 (2) が成り立つことを示す．任意の $v \in \Phi \cap N$ をとる．このとき，$\Phi \cap N = \langle v_j \rangle_{j<\omega}$ の並べ方より，ある無限部分集合 $I \subseteq \omega$ が存在して，

$$\forall i \in I\,(v_i = v). \tag{8.12}$$

関数 u の定義より，すべての $i \in I$ に対して，$x_i \in \mathrm{dom}(v_i) \cap \mathrm{dom}(u)$ かつ $u(x_i) = \{S_\xi \restriction A : \xi \in v_i(x_i)\}$. このとき，(8.12) より，すべての $i \in I$ に対して，$x_i \in \mathrm{dom}(v) \cap \mathrm{dom}(u)$ かつ $u(x_i) = \{S_\xi \restriction A : \xi \in v(x_i)\}$. □

IV. $\beta \in \mathfrak{c} \setminus \sup(\mathfrak{c} \cap N)$ かつ $\langle A, \mathcal{R}, u \rangle = \langle A_\beta, \mathcal{R}_\beta, u_\beta \rangle$ である $\beta < \mathfrak{c}$ を 1 つ選んで固定する．このとき，$A = A_\beta \subseteq \beta \times \omega$ であることに注意しよう．

$$\forall \xi \in H'\,(\beta \text{ is } \xi\text{-homogeneous}) \tag{8.13}$$

を証明することが目標である．

補題 8.7 (Reflection Lemma). 任意の $k < \omega$ に対して，次の 3 条件 (R_i) $(i = 1, 2, 3)$ を満たす点 $x = \langle \alpha, k \rangle \in \mathrm{dom}(u)$ が存在する．

(R_1) $t(\alpha, k) \cap M = t(\beta, k) \cap M$,
(R_2) $\forall \xi \in t(\beta, k) \cap M\,(\langle \beta, k \rangle(\xi) = \langle \alpha, k \rangle(\xi))$,
(R_3) $u(x) = \{S_\xi \restriction A : \xi \in t(\alpha, k) \setminus M\}$.

証明. 任意の $k < \omega$ を固定する．$r = t(\beta, k) \cap M$ とおき，写像 $f : r \to 2$ を $f(\xi) = \langle \beta, k \rangle(\xi)$ $(\xi \in r)$ によって定義する．このとき，$r, f \in M$ である．

> 註. $r, f \in M$ であること：r は M の有限部分集合だから，補題 4.7 より $r \in M$. また，補題 4.7 より，$2 \in M$. 直積 $r \times 2$ は M の元 $r, 2$ によって一意的に定義される集合だから，$r \times 2 \in M$. f は $r \times 2$ の有限部分集合だから，再び補題 4.7 より $f \in M$.

集合 $D \subseteq \mathfrak{c}$ に関する次の 2 つの条件を考えよう．

$$\forall \alpha \in D\,(t(\alpha, k) \supseteq r \text{ and } \forall \xi \in r\,(\langle \alpha, k \rangle(\xi) = f(\xi))), \tag{8.14}$$
$$\forall \alpha, \alpha' \in D\,(\alpha \neq \alpha' \to (t(\alpha, k) \setminus r) \cap (t(\alpha', k) \setminus r) = \emptyset). \tag{8.15}$$

$\psi(D, t, k, r, f) =$ “D は (8.14) と (8.15) を満たす” として，

$$\Psi = \{D \subseteq \mathfrak{c} : \psi(D, t, k, r, f)\}$$

とおく．このとき，$\{\beta\} \in \Psi$ だから，$\Psi \neq \emptyset$. したがって，Zorn の補題より Ψ の極大元が存在する．すなわち，

$$H(\theta) \models \exists D\,(\underbrace{D \text{ is a maximal element of } \Psi}_{\psi_0(D,t,k,r,f)}).$$

いま $t, k, r, f \in M$ だから，$\exists D \in M\,(H(\theta) \models$ "D is a maximal element of Ψ").

主張 4. $|D| > \omega$.

証明. もし $|D| \leq \omega$ であったとする．このとき，定理 4.8 より $D \subseteq M$. いま，$\beta \notin M$ だから，$\beta \notin D$. 一方，任意の $\alpha \in D$ に対し，$\alpha, t, k \in M$ だから，$t(\alpha, k) \in M$. 補題 4.7 (3) より，$t(\alpha, k) \subseteq M$. ゆえに，

$$\bigcup_{\alpha \in D} (t(\alpha, k) \setminus r) \cap (t(\beta, k) \setminus r) = \emptyset$$

だから，$D \cup \{\beta\} \in \Psi$. これは，$D$ の極大性に矛盾する． □

M は可算だから，集合 $E = \{\alpha \in D : (t(\alpha, k) \setminus r) \cap M = \emptyset\}$ は非可算である．いま，$D, t, k, r, M \in N$ だから，$E \in N$.

> 註. 詳しく言えば，任意の $\alpha \in H(\theta)$ に対し，
>
> $$\alpha \in E \Leftrightarrow H(\theta) \models \text{“}\underbrace{\alpha \in D \text{ and } (t(\alpha, k) \setminus r) \cap M = \emptyset}_{\psi_1(\alpha, D, t, k, r, M)}\text{”}.$$
>
> $D, t, k, r, M \in N$ だから，系 4.4 より $E \in N$.

写像 $v : E \times \{k\} \to [H \setminus M]^{<\omega}$ を $v(\alpha, k) = t(\alpha, k) \setminus r$ によって定義する．このとき，$E, t, k, r \in N$ だから，$v \in N$.

> 註. 詳しく言えば，任意の $y \in H(\theta)$ に対し，
>
> $$y \in v \Leftrightarrow H(\theta) \models \underbrace{\exists \alpha \in E\,(y = \langle\langle \alpha, k\rangle, t(\alpha, k) \setminus r\rangle)}_{\psi_2(y, E, k, t, r)}.$$
>
> $E, k, t, r \in N$ だから，系 4.4 より $v \in N$.

結果として，補題 8.6 より，ある $x = \langle \alpha, k\rangle \in \mathrm{dom}(v) \cap \mathrm{dom}(u)$ に対して，

$$u(x) = \{S_\xi \upharpoonright A : \xi \in v(x)\} = \{S_\xi \upharpoonright A : \xi \in t(\alpha, k) \setminus r\}.$$

ゆえに，この $x = \langle \alpha, k\rangle$ に対して，(R_3) が成立する．いま，$\alpha \in E \subseteq D \in \Psi$ だから，$t(\alpha, k) \supseteq r$ かつ $(t(\alpha, k) \setminus r) \cap M = \emptyset$. したがって，$t(\alpha, k) \cap M = r = t(\beta, k) \cap M$. ゆえに，$(\mathrm{R}_1)$ が成立する．また，$\alpha \in D \in \Psi$ だから，任意の $\xi \in \tau(\beta, k) \cap M = r$ に対して，$\langle \beta, k\rangle(\xi) = f(\xi) = \langle \alpha, k\rangle(\xi)$. ゆえに，$(\mathrm{R}_2)$ が成立する． □

V. 最後に，(8.13) が成立しないと仮定して矛盾を導こう．このとき，β が μ-homogeneous でないような $\mu \in H'$ が存在する．(T_0), (T_1) より，十分大きな k をとり，$y = \langle \beta, k\rangle$ とおくと，

$$(\forall i < 2)((\{\beta\} \times (k+1)) \cap B^i_\mu \neq \emptyset), \tag{8.16}$$

$$\mu \in t(y) \tag{8.17}$$

が成り立つ．この k に対して，補題 8.7 (Reflection Lemma) より，次の (R_i) $(i=1,2,3)$ を満たす点 $x=\langle\alpha,k\rangle\in\mathrm{dom}(u)$ が存在する．

(R_1) $t(x)\cap M=t(y)\cap M$,

(R_2) $\forall\xi\in t(y)\cap M\,(y(\xi)=x(\xi))$,

(R_3) $u(x)=\{S_\xi\restriction A:\xi\in t(x)\setminus M\}$.

いま，$H'\in M$ だから，定理 4.8 より $H'\subseteq M$．したがって，(8.17) と (R_1) より，$\mu\in t(y)\cap H'\subseteq t(y)\cap M\subseteq t(x)$ であることに注意しよう．

主張 **5.** $\{\beta\}\times(k+1)\subseteq V_{t(x)\cap\mu,K(x)}(x)$.

証明. 次の定義を思い出そう．

$$V_{t(x)\cap\mu,K(x)}(x)=\left(\bigcap_{\xi\in t(x)\cap\mu}B_\xi^{x(\xi)}\cap(W_{k+1}\setminus K(x))\right).$$

いま，$x\in\mathrm{dom}(u)\subseteq A\subseteq N$ かつ $K\in N$ だから，$K(x)\in N$．定理 4.8 より $K(x)\subseteq N$．結果として，$K(x)\subseteq X\cap N=(\mathfrak{c}\cap N)\times\omega$ かつ $\beta\notin N$ だから，$(\{\beta\}\times\omega)\cap K(x)=\emptyset$．したがって，任意の $\xi\in t(x)\cap\mu$ に対して，

$$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq B_\xi^{x(\xi)}$$

が成り立つことを示せばよい．このことを ξ に関する帰納法で示そう．いま，$\xi\in t(x)\cap\mu$ として，任意の $\eta\in t(x)\cap\xi$ に対して，$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq B_\eta^{x(\eta)}$ が成立すると仮定する．このとき，帰納法の仮定と (T_2) より

$$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq V_{t(x)\cap\xi,K(x)}(x)\subseteq U_\xi^{x(\xi)}. \tag{8.18}$$

<u>Case (a).</u> $\xi\in t(x)\cap M$:
このとき $\xi\in H\cap M$ だから，$S_\xi|A_\beta=S_\xi|A\in\mathcal{R}=\mathcal{R}_\beta$．ゆえに，主張 1 (1) と (8.18) より，$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq B_\xi^{y(\xi)}$．$(\mathrm{R}_1)$, (R_2) より，$x(\xi)=y(\xi)$ だから，$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq B_\xi^{x(\xi)}$.

<u>Case (b).</u> $\xi\in t(x)\setminus M$:
このとき，(R_3) より，$S_\xi\restriction A_\beta=S_\xi\restriction A\in u(x)=u_\beta(x)$ かつ $x\in\mathrm{dom}(u)=\mathrm{dom}(u_\beta)$．ゆえに，主張 1 (2) と (8.18) より，$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq B_\xi^{x(\xi)}$.

以上により，主張 5 は成立する． □

最後に，主張 5 と近傍 $V_{t(x),K(x)}(x)$ の完全性より，$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq U_\mu^{x(\mu)}$．いま $\mu\in H\cap M$ だから，$S_\mu\restriction A_\beta=S_\mu\restriction A\in\mathcal{R}=\mathcal{R}_\beta$．ゆえに，主張 1 (1) より，$\{\beta\}\times(k+1)\subseteq B_\mu^i$ を満たす $i<2$ が存在する．これは (8.16) に矛盾する． □

参考文献

[1] J. E. Baumgartner, *Applications of the Proper Forcing Axiom*, in: K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam (1984), 913–959.

[2] Z. T. Balogh, *A small Dowker space in ZFC*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2555–2560.

[3] Z. T. Balogh, *A normal screenable nonparacompact space in ZFC*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 1835–1844.

[4] Z. T. Balogh, *Nonshrinking open covers and K. Morita's third conjecture*, Topology Appl., **84** (1998), 185–198.

[5] Z. T. Balogh, *Dowker spaces and paracompactness questions*, Topology Appl., **114** (2001), 49–60.

[6] Z. T. Balogh, *Nonshrinking open covers and K. Morita's duality conjecture*, Topology Appl., **115** (2001), 333–341.

[7] Z. T. Balogh, *A natural Dowker space*, Topology Proc., **27** (2003), 1–7.

[8] A. Dow, *An introduction to applications of elementary submodels to topology*, Topology Proc., **13** (1988), 17–72.

[9] A. Dow, *An empty class of nonmetric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **104** (1988), 999–1001.

[10] M. Holz, K. Steffens and E. Weitz, *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser, 1999.

[11] W. Just and M. Weese, *Discovering Modern Set Theory. II, Set-Theoretic Tools for Every Mathematician*, Graduate Studies in Math. Vol. **18**, Amer. Math. Soc., 1995.

[12] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proof*, North-Holland, 1980.（藤田博司訳, 日本評論社, 2008）

[13] 玉野研一, 積の正規性と elementary submodel, 数理解析研究所講究録, **823** (1993), 73-79

[14] K. Tamano, *A proof of normality of* Σ*-products of metrizable spaces by elementary submodels*, unpublished note (March, 1992).