演習 14.1.3 解答例　第 1 可算公理を満たす任意の 2 進コンパクト空間 X が第 2 可算公理を満たすことを示す．定義より，X は T_2 空間で，ある集合 Λ と連続な全射 $f : D^\Lambda \longrightarrow X$ が存在する．ただし，$D = \{0, 1\}$. いま，Λ が可算集合ならば，D^Λ はコンパクト距離化可能だから，X もコンパクト距離化可能 (補題 12.15)．結果として，X は第 2 可算公理を満たす (系 7.59)．ゆえに，Λ が非可算集合である場合が問題になる．

点 $x \in D^\Lambda$ と有限集合 $M \subseteq \Lambda$ に対して，

$$B(x, M) = \bigcap_{\lambda \in M} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}\{x(\lambda)\} \bigl(= \{y \in D^\Lambda : y\restriction_M = x\restriction_M\}\bigr)$$

とおく．積位相の定義から，$\{B(x, M) : M \in [\Lambda]^{<\aleph_0}\}$ は x の近傍基底である．また，任意の $\Delta \subseteq \Lambda$ に対して，D^Λ の部分空間 D_0^Δ を

$$D_0^\Delta = \{x \in D^\Lambda : (\forall \lambda \in \Lambda \setminus \Delta)(x(\lambda) = 0)\}$$

によって定義する．このとき，D_0^Δ は積空間 D^Δ と位相同型である．

主張 1　任意の点 $x \in D^\Lambda$ に対して，条件

$$(\forall y \in D^\Lambda)(y\restriction_{S(x)} = x\restriction_{S(x)} \text{ ならば } f(y) = f(x)) \tag{1}$$

を満たす可算集合 $S(x) \subseteq \Lambda$ が存在する．

証明　任意の点 $x \in D^\Lambda$ をとると，X が第 1 可算公理を満たすことから，

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

を満たす $f(x)$ の近傍の族 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ が存在する．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，f の連続性より，$f(U_n) \subseteq V_n$ を満たす x の近傍 U_n が存在する．さらに，有限集合 $M_n \subseteq \Lambda$ が存在して，$B(x, M_n) \subseteq U_n$ が成り立つ．このとき，

$$S(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

とおくと，$S(x)$ は Λ の可算部分集合で (1) を満たす．　□

演習 14.1.3 の解答を続ける．数学的帰納法により，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，可算集合 $\Delta_n \subseteq \Lambda$ と可算集合 $Z_n \subseteq D_0^{\Delta_n}$ で，以下の 3 条件 (2), (3), (4) を満たすものが定義できる．

$$\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}, \tag{2}$$

$$Z_n \text{ は } D_0^{\Delta_n} \text{ で稠密}, \tag{3}$$

$$(\forall z \in Z_n)(S(z) \subseteq \Delta_{n+1}). \tag{4}$$

実際，Δ_1 を Λ の任意の空でない可算部分集合とする．次に，Δ_n が定義されたとき，積空間 D^{Δ_n} は可分だから，$D_0^{\Delta_n}$ も可分．したがって，$D_0^{\Delta_n}$ の可算稠密部分集合 Z_n が存在する．そこで，

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \bigcup_{z \in Z_n} S(z)$$

と定めることにより，3 条件 (2), (3), (4) を満たす可算集合の族 $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ と $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ が定義される．このとき，

$$\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \tag{5}$$

とおくと，Δ は Λ の可算部分集合．上で注意したように $D_0^{\Delta} \approx D^{\Delta}$ だから，D_0^{Δ} はコンパクト距離化可能．したがって，

$$f(D_0^{\Delta}) = X \tag{6}$$

であることを示せば，X が第 2 可算公理を満たすことが導かれる．そのために，点 $p \in X \setminus f(D_0^{\Delta})$ が存在したと仮定する．いま f は全射だから，$f(x) = p$ である点 $x \in D^{\Lambda}$ が存在する．また，X は T_2 空間で $f(D_0^{\Delta})$ はコンパクトだから，$f(D_0^{\Delta})$ は X の閉集合．すなわち，$X \setminus f(D_0^{\Delta})$ は p の近傍．したがって，f の連続性より，

$$f(U) \cap f(D_0^{\Delta}) = \emptyset \tag{7}$$

を満たす x の近傍 U が存在する．さらに，$B(x, M) \subseteq U$ を満たす有限集合 $M \subseteq \Lambda$ が存在する．(2) と (5) より，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して，$M \cap \Delta \subseteq \Delta_n$ が成立する．このとき，$B(x, M \cap \Delta)$ は D^{Λ} の開集合で $D_0^{\Delta_n}$ と交わるから，(3) よりある点 $z \in B(x, M \cap \Delta) \cap Z_n$ が存在する．定義より，$z \in D_0^{\Delta_n} \subseteq D_0^{\Delta}$. 次に，$D^{\Lambda}$ の点 y を，

$$y(\lambda) = \begin{cases} z(\lambda), & (\lambda \in \Delta) \\ x(\lambda), & (\lambda \in \Lambda \setminus \Delta) \end{cases}$$

によって定めると，$y \in B(x, M) \subseteq U$. ゆえに，$f(y) \in f(U)$. ところが，(4) より $S(z) \subseteq \Delta$ だから $y{\restriction}_{S(z)} = z{\restriction}_{S(z)}$. (1) より，$f(y) = f(z) \in f(D_0^{\Delta})$. これらは (7) に矛盾するから，(6) が成立する． $\square$