問題. $D \subseteq \mathbb{R}$ とする．次の (1), (2) の真偽を調べよ．

(1) $f, g : D \to \mathbb{R}$ が一様連続ならば，$f + g$ は一様連続である．

(2) $f, g : D \to \mathbb{R}$ が一様連続ならば，fg は一様連続である．

解答.

(1) は正しい．

理由：いま，$f, g : D \to \mathbb{R}$ は一様連続であるとする．和 $f + g$ が一様連続であることを示すために，任意の $\varepsilon > 0$ をとる．f は一様連続だから，ある $\delta_1 > 0$ が存在して，

$$|x - y| < \delta_1 \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

が任意の点 $x, y \in D$ に対して成立する．また，g は一様連続だから，ある $\delta_2 > 0$ が存在して，

$$|x - y| < \delta_2 \quad \text{ならば} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

が任意の点 $x, y \in D$ に対して成立する．そこで，$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく．このとき，

$$|x - y| < \delta \quad \text{ならば} \quad |(f + g)(x) - (f + g)(y)| < \varepsilon \tag{3}$$

が任意の点 $x, y \in D$ に対して成立することを示せばよい．そのために，$|x - y| < \delta$ であると仮定する．このとき，$|x - y| < \delta \le \delta_i$ $(i = 1, 2)$ だから，(1), (2) より，

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}
|(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \\
&= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \\
&\le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに，(3) が成立するから，$f+g$ は一様連続である．

(2) は正しくない．

理由：反例を与える．$\mathbb{R}$ 上の 1 次関数 $f(x)=x$, $g(x)=x$ は一様連続であるが，積 $(fg)(x)=x^2$ は一様連続でない．なぜなら，もし $(fg)(x)=x^2$ が一様連続ならば，$\varepsilon=1$ に対して，$\delta>0$ が存在して，

$$|x-y|<\delta \quad \text{ならば} \quad |x^2-y^2|<\varepsilon \tag{4}$$

が任意の点 $x,y\in\mathbb{R}$ に対して成立する．いま，$x>1/\delta$ である点 x をとり，$y=x+(\delta/2)$ とおく．このとき，

$$|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta.$$

ところが，$x>1/\delta$ だから，

$$\begin{aligned}|x^2-y^2| &= \left|x^2-\left(x^2+\delta x+\frac{\delta^2}{4}\right)\right| \\ &= \left|\delta x+\frac{\delta^2}{4}\right| > 1+\frac{\delta^2}{4} > 1=\varepsilon.\end{aligned}$$

これは (4) に矛盾する．ゆえに，$(fg)(x)=x^2$ は一様連続でない．