定理 4.3 (1) の証明

49 ページの図 4.2 と同じ記号を使う．このとき，

$$\mathrm{A_1B_1} = \frac{a_m}{2} = \frac{1}{s_n}, \quad \mathrm{A_2B_2} = \frac{a_{2n}}{2} = \frac{1}{s_{2n}}. \tag{1}$$

はじめに $u = \mathrm{OB_1}$ とおくと，ピタゴラスの定理と (1) より，

$$u = \sqrt{1 - (\mathrm{A_1B_1})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{s_n^2}} = \frac{\sqrt{s_n^2 - 1}}{s_n}. \tag{2}$$

いま，$\mathrm{OE} : \mathrm{EB_1} = \mathrm{OA_2} : \mathrm{A_2B_2}$ かつ $\mathrm{OA_2} = 1$ だから，(1) より

$$s_{2n}^2 = \frac{1}{(\mathrm{A_2B_2})^2} = \frac{(\mathrm{OE})^2}{(\mathrm{EB_1})^2}.$$

さらに，ピタゴラスの定理より，$(\mathrm{OE})^2 = u^2 + (\mathrm{EB_1})^2$ だから，

$$s_{2n}^2 = \frac{u^2 + (\mathrm{EB_1})^2}{(\mathrm{EB_1})^2} = \frac{u^2}{(\mathrm{EB_1})^2} + 1. \tag{3}$$

線分 OE は $\angle \mathrm{A_1OB_1}$ を二等分するから，点 E は $\mathrm{A_1B_1}$ を $1 : u$ の比に内分する．したがって，

$$\mathrm{EB_1} = \frac{u}{1+u}\mathrm{A_1B_1} = \frac{u}{s_n(1+u)}. \tag{4}$$

(3) と (4) より $s_{2n}^2 = s_n^2(1+u)^2 + 1$ だから，(2) より

$$s_{2n}^2 = s_n^2\left(1 + \frac{\sqrt{s_n^2 - 1}}{s_n}\right)^2 + 1 = (s_n + \sqrt{s_n^2 - 1})^2 + 1.$$

ゆえに，(1) が成立する． □